

Istituzioni di Analisi Matematica

Domande frequenti

GLI SPAZI L^p COME SPAZI DI BANACH

- (1) Caratterizzazione dei funzionali lineari limitati su L^p nel caso $p \in (1, +\infty)$.
- (2) Caratterizzazione dei funzionali lineari limitati su L^p nel caso $p = 1$.
- (3) Lo spazio duale di L^∞ non è L^1 .
- (4) L^1 non è lo spazio duale di uno spazio di Banach.
- (5) Lo spazio duale $\mathcal{B}'$ è uno spazio di Banach; definizione di norma operatoriale.
- (6) Convergenza debole in L^p : definizione ed esempi.
- (7) Per $p \in (1, +\infty)$, ogni successione limitata in L^p ammette una sottosuccessione debolmente convergente.
- (8) Semicontinuità della norma L^p rispetto alla convergenza debole.
- (9) Teorema di Radon-Riesz con dimostrazione nel caso $p \in [2, +\infty)$.
- (10) Le successioni debolmente convergenti sono limitate (capitolo 2, parte 2).

TEORIA GENERALE DEGLI SPAZI DI BANACH

- (11) Operatori lineari continui e spazio duale: norma di un operatore lineare, completezza dello spazio degli operatori lineari continui su uno spazio di Banach, spazio bi-duale, spazi riflessivi.
- (12) Teorema di Hahn-Banach:
 - (12.1) versione 1 - estensione di un operatore limitato definito su un sottospazio vettoriale
 - (12.2) versione 2 - esistenza di operatori limitati (e non banali) identicamente nulli su un determinato spazio chiuso.
- (13) Teorema di Banach-Steinhaus e Lemma di Baire.
- (14) Topologia debole su spazi di Banach di dimensione infinita:
 - (14.1) caratterizzazione della chiusura debole della sfera unitaria in uno spazio di Banach;
 - (14.2) la palla aperta unitaria non è un aperto della topologia debole;
 - (14.3) non-metrizzabilità della topologia debole su $\mathcal{B}$;
 - (14.4) metrizzabilità della topologia debole sulla palla chiusa unitaria.
- (15) Topologia debole- $*$: Teoremi di Tychonoff e di Banach-Alaoglu-Bourbaki.
- (16) La separabilità dello spazio duale implica la separabilità dello spazio di Banach stesso.

FUNZIONI DI SOBOLEV DI UNA VARIABILE

(17) Teorema di rappresentazione delle funzioni di Sobolev:

Per ogni $u \in W^{1,p}(I)$ esiste una funzione continua $\tilde{u} : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\tilde{u} = u$ q.o. in I e

$$\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) = \int_x^y u'(t) dt \quad \text{per ogni } x, y \in I.$$

(18) Traslazioni e caratterizzazione dello spazio $W^{1,p}(\mathbb{R})$:

Data $u \in L^p(\mathbb{R})$ con $p \in (1, +\infty)$, sono equivalenti:

- $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$;
- esiste una costante $C > 0$ tale che:

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{L_x^p(\mathbb{R})} \leq C|h| \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{R}.$$

(19) Teorema di estensione da $W^{1,p}(a, b)$ a $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Dati $I = (a, b)$ intervallo limitato, $p \in (1, +\infty)$ e $u \in W^{1,p}(I)$, esiste $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ tale che:

$$\tilde{u} = u \quad \text{su } I; \quad \|\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)}; \quad \|\tilde{u}'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}.$$

(20) Approssimazione delle funzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R})$ con funzioni regolari:

Per $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, $p \in (1, +\infty)$, esiste $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

(21) Limitatezza delle funzioni $W^{1,p}(I)$:

Sia I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e sia $p \in (1, +\infty)$. Allora, $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ e

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \text{per ogni } u \in W^{1,p}(I)$$

Inoltre, se I è limitato, allora le successioni limitate in $W^{1,p}(p > 1)$ sono compatte in L^∞ .

(21) Prodotto tra funzioni di Sobolev:

Se $u, v \in W^{1,p}(I)$ con $p \in (1, +\infty)$, allora $uv \in W^{1,p}(I)$ e $(uv)' = u'v + uv'$.

(22) Parte positiva di una funzione di Sobolev:

Mostare che se $u \in W^{1,p}(I)$, allora per ogni funzione $G \in C^1$, $G(u) \in W^{1,p}(I)$.

In particolare, $u_+ \in W^{1,p}(I)$ e $(u_+)' = 1_{\{u>0\}}u'$.

(23) Gli spazi $W_0^{1,p}(I)$: Definire $W_0^{1,p}(I)$ e mostrare che una funzione $u \in W^{1,p}(I)$ è in $W_0^{1,p}(I)$ se e solo se è zero negli estremi di I .

(24) Serie di Fourier e gli spazi H^1 ed H_0^1 su un intervallo limitato.

SPAZI DI SOBOLEV IN DIMENSIONE SUPERIORE

(25) Densità delle funzioni C^∞ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

(26) Teorema di Rellich:

(26.1) per funzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ a supporto in B_R ;

(26.2) per funzioni in $W_0^{1,p}(\Omega)$ con Ω limitato.

(27) Teorema di estensione:

(27.1) Versione 1. Per ogni $u \in W^{1,p}(B_R)$, $p \in (1, +\infty)$, esiste $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ tale che:
 $\tilde{u} \equiv u$ in B_R ; $\tilde{u} \equiv 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus B_{2R}$; $\|\nabla \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C_{d,p} (\|u\|_{L^p(B_R)} + \|\nabla u\|_{L^p(B_R)})$.

(27.2) Versione 2. Siano $p \in (1, +\infty)$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e limitato di classe C^1 . Per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ esiste $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ che estende u ed è tale che

$$\|\nabla \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C_{d,p} (\|u\|_{L^p(B_R)} + \|\nabla u\|_{L^p(B_R)}) .$$

(28) Disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger: su palle e su insiemi regolari.

(29) Traccia di una funzione di Sobolev:

(29.1) Definizione della traccia su ∂B_R di una funzione in $H^1(B_R)$; disuguaglianza di traccia; inclusione compatta di $H^1(B_R)$ in $L^2(\partial B_R)$;

(29.2) Definizione della traccia di una funzione in $W^{1,p}(\Omega)$ sul bordo di un insieme Ω di classe C^1 ; disuguaglianza di traccia;

(29.3) Funzioni a traccia nulla e gli spazi $W_0^{1,p}$.

(30) Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev e immersione di $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ in L^{p^*} per $p < d$.

(31) Lemma di Morrey; continuità e limitatezza delle funzioni $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ nel caso $p > d$.

(32) Soluzioni deboli dell'equazione

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega$$

in un dominio aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

- formulazione variazionale, esistenza e unicità;
- definizione e proprietà dell'operatore risolvete;
- esistenza di autovalori e autofunzioni del laplaciano con condizioni di Dirichlet.

(33) Operatori continui su spazi di Hilbert separabili:

(33.1) Caratterizzazione degli operatori continui da $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}$ come operatori che mandano successioni debolmente convergenti in successioni debolmente convergenti.

(33.2) Operatori compatti: definizioni equivalenti (capitolo 4, parte 8, teorema 11).

(33.3) Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti e positivi.