Algebra Lineare

Coordinate di un vettore rispetto a una base

V = spazio vettoriale su un campo K (tipicamente $K=\mathbb{R}$ o $K=\mathbb{C}$
$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V.
Ogni vettore $v \in V$ si può scrivere (in un solo modo) nella forma

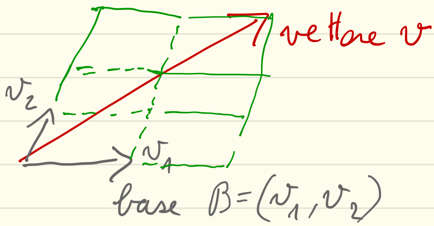
$$v = \underbrace{a_1}_{\text{coordinate}} v_1 + \dots + \underbrace{a_n}_{\text{coordinate}} v_n$$

$a_1, \dots, a_n$ sono le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

$$(v)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

è il vettore delle coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esempio



$v = 2v_1 + 3v_2 \qquad (v)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

evitate la confusione tra vettori e loro coordinate!

$V = \mathbb{R}^2$ $\boxed{v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in V}$ vettore.

Se scelgo la base canonica $\mathcal{E} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ allora le coordinate di v sono proprio $2, 3$

$$\boxed{(v)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} \Leftarrow \text{perché } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Però se scelgo un'altra base, ad esempio

$\mathcal{B} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

lo stesso vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in V$ avrà coordinate diverse

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Risolvo il sistema e trovo $y = 3$, $x = -1$. Quindi:

$$\boxed{(v)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Il vettore v è sempre lo stesso, le sue coordinate nelle due basi sono diverse.

MATRICE DI UN'APPLICAZIONE LINEARE RISPETTO A DATE BASI

$L : V \to W$ lineare, $\dim(V) = n$, $\dim(W) = k$

$\mathcal{B} = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ base di V, $\mathcal{C} = \langle c_1, \ldots, c_k \rangle$ base di W.

$[L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ = matrice di L rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$.

$$[L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

La i-esima colonna $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ki} \end{pmatrix}$ è data dalle coordinate di $L(b_i)$ rispetto alla base $\mathcal{C}$.

La matrice fatta così ha la seguente proprietà:

Se $\underbrace{L}_{\text{applicazione lineare}}(\underbrace{v}_{\text{input}}) = \underbrace{w}_{\text{output}}$, allora $\underbrace{[L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}}_{\text{matrice}} \underbrace{(v)_{\mathcal{B}}}_{\text{coordinate dell'input}} = \underbrace{(w)_{\mathcal{C}}}_{\text{coordinate dell'output}}$

ESEMPIO

$$[L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} (b_1)_{\mathcal{B}} = [L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{perché } b_1 = 1b_1 + 0b_2 + \ldots + 0b_n} = 1^a \text{ colonna } [L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

$$= [L(b_1)]_{\mathcal{C}}$$

- ESEMPIO

$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\quad \beta \qquad \gamma$

$$\boxed{[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$ (rispetto alla base canonica)

$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ nuove basi di partenza e di arrivo

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 - 2R_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$[L]_\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

- ESEMPIO

$$\boxed{[L] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[L]_\gamma^\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Teorema del completamento ad una base (p 45 Dispense)

Sia V uno spazio di dimensione finita $n = \dim(V)$ e siano $v_1, \dots, v_k \in V$ linearmente indipendenti.

Allora $k \leq n$ ed è possibile estendere $v_1, \dots, v_1$ ad una base $\underline{v_1, \dots, v_k}, w_1, \dots, w_{n-k}$ di V

Come trovo $w_1, \dots, w_{n-k}$? Si considera fissata una base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_k)$ di V

Rispetto a questa base

$$(v_1)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \qquad (v_2)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \qquad (v_k)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

Creo la matrice

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nk} \end{array}\right) = \left((v_1)_{\mathcal{E}} \middle| (v_2)_{\mathcal{E}} \middle| \dots \middle| (v_k)_{\mathcal{E}} \right)$$

La riduco a scalini per colonna con mosse di colonna

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \text{zeri} & & \\ & 0 & 0 & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 0 \ 0 \end{pmatrix}$$

lo span delle colonne di M è uguale a quello delle colonne di M'.

M' ha k pivot.
Aggiungo $n-k$ colonne in modo da ottenere n pivot.

ora prendo come $w_1, \dots, w_{n-k}$ i vettori che hanno come coordinate le colonne che ho aggiunto.

Teo. Siano V, W spazi vettoriali di dimensione finita.

$L : V \to W$ lineare. $n = \dim(V)$.

Allora

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker}(L) + \underbrace{\dim(\operatorname{Im} L)}_{\substack{\| \\ L(V)}} = \dim(V) \qquad (*)}$$

$$\operatorname{Im} L \subset W$$

Dim.

Tratto prima i casi facili:

(1) Se $\operatorname{Ker} L = V$. Allora $\operatorname{Im}(L) = \{\bar{0}_W\}$.

e la formula torna:

$$\boxed{n + 0 = n}$$

(2) Se $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$

Sia $e_1, .., e_n$ una base di V.

$\operatorname{Im}(L) = \operatorname{Span} L(e_1), ..., L(e_n)$ (verificate!)

Inoltre $L(e_1), .., L(e_n)$ sono indipendenti.

Se infatti $a_1 L(e_1) + .. + a_n L(e_n) = 0$

ho $L(a_1 e_1 + .. + a_n e_n) = 0$

$a_1 e_1 + ... + a_n e_n \in \operatorname{Ker}(L) = \{\bar{0}\}$

$a_1 e_1 + ... + a_n e_n = 0$

$a_1 = ... = a_n = 0$.

Quindi: $L(e_1), ..., L(e_n)$ sono una base di $\operatorname{Im}(L)$.

Anche in questo caso la formula torna:

$$\boxed{0 + n = n}$$

③ Caso generale: $L : V \to W$

$z_1, \dots, z_k$ base di $\ker(L)$

per il teorema del "completamento a una base" esistono $w_1, \dots, w_{n-k} \in V$ tali che

$$\underbrace{z_1, \dots, z_k, w_1, \dots, w_{n-k}}_{n \text{ vettori in tutto}} \text{ è una base di } V.$$

$$\mathrm{Im}(L) = \mathrm{Span}\, L(z_1), \dots, L(z_k), L(w_1), \dots, L(w_{n-k})$$

$$= \mathrm{Span}\{L(w_1), \dots, L(w_{n-k})\}$$

se dimostro che $L(w_1), \dots, L(w_{n-k})$ sono indipendenti, allora $\dim \mathrm{Im}(L) = n-k$ e la formula torna:

$$\boxed{k + (n-k) = n.}$$

Per dimostrare che sono indipendenti supponiamo

$$a_1 L(w_1) + \dots + a_k L(w_{n-k}) = 0$$

$$\Rightarrow L(a_1 w_1 + \dots + a_k w_k) = 0$$

$$\Rightarrow a_1 w_1 + \dots + a_k w_k \in \ker(L)$$

$$\Rightarrow \exists b_1, \dots, b_k \quad a_1 w_1 + \dots + a_k w_k = b_1 z_1 + \dots + b_k z_k$$

Quindi $a_1 w_1 + \dots + a_k w_k - b_1 z_1 - \dots - b_k z_k = 0$

Ma $z_1, \dots, z_k, w_1, \dots, w_k$ sono indipend.

Quindi tutti gli a_i e i b_j sono $= 0$.

In particolare $a_1 = \dots = a_k = 0$. □

Dimensione dell'intersezione e della somma di sottospazi

Teorema V spazio vettoriale
$A, B \subset V$ sottospazi

$\Rightarrow \dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$

Dimostrazione. Basi $\{a_1, \dots, a_n\}$ di A, $\{b_1, \dots, b_m\}$ di B

Considero $A \times B$ = lo spazio delle coppie (a, b) con $a \in A$, $b \in B$

Base di $A \times B = \{(a_1, 0), \dots, (a_n, 0), (0, b_1), \dots, (0, b_m)\}$.

$L : A \times B \longrightarrow V \qquad L((a,b)) = a - b$

L è lineare.

$\mathrm{Ker}(L) = \{(a,a) \mid a \in A \cap B\}$

$\dim \mathrm{Ker}(L) = \dim A$.

$\mathrm{Im}(L) = A + B$

Per il teorema che lega la dimensione del nucleo a quella dell'immagine

$$\dim \mathrm{Ker}(L) + \dim \mathrm{Im}(L) = \dim(A \times B)$$

ovvero

$$\dim(A \cap B) + \dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B).$$

$\square$

Teo: $\operatorname{Det} A \neq 0 \iff \operatorname{Ker} A = 0$ (A matrice $n \times n$)

Caso 1 Prima lo dimostro per A a scalini.

In questo caso osservo che

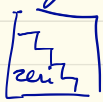
(a) $\operatorname{Det} A =$ prodotto elementi sulla diagonale (può essere zero).

(b) $\operatorname{Ker}(A) = 0$ se e solo se ci sono n pivot.

Da (a) e (b) deduco che $\operatorname{Det} A \neq 0 \iff$ gli elementi sulla diagonale sono $\neq 0 \iff$ ci sono n pivot $\iff$ $\operatorname{Ker}(A) = 0$.

Caso 2

Se A non è a scalini la riduco a scalini con mosse di riga

$A \rightsquigarrow B =$ 

Si verifica che

perché le mosse di riga possono alterare il determinante solo per una costante $\neq 0$

$$\operatorname{Det}(A) \neq 0 \iff \operatorname{Det}(B) \neq 0$$

$$\Updownarrow \quad \text{per il Caso 1}$$

$$\operatorname{Ker}(A) = 0 \iff \operatorname{Ker}(B) = 0$$

le mosse di riga non cambiano il ker.

$\square$

Osservazione: $\operatorname{Ker} A = 0 \iff$ le colonne di A sono indipendenti $\iff L_A$ è surgettiva

Quindi: $\operatorname{Det} A \neq 0 \iff L_A$ è invertibile.

Formula di Cramer

Consideriamo un sistema lineare $n \times n$

$$(*) \qquad Ax = b$$

con A matrice $n \times n$. $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

C'è soluzione unica se e solo se le colonne di A sono linearmente indipendenti ovvero se e solo se $\operatorname{Det} A \neq 0$.

ricordo che se $\left[c_1 \middle| c_2 \middle| \dots \middle| c_n \right] = A$ allora

$$Ax = \left[c_1 \middle| \dots \middle| c_n \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \left[c_1 \right] + \dots + x_n \left[c_n \right] = \left[b \right]$$

per trovare x che risolve $(*)$ uso la formula di Cramer:

$$x_i = \frac{\operatorname{Det} \left[c_1 \middle| c_2 \middle| \quad \middle| b \middle| \dots \middle| c_n \right]}{\operatorname{Det} A} \qquad (\#)$$

Cramer

La dimostro prima nel caso 3x3 $\qquad A = [c_1 | c_2 | c_3]$

$$(c_1, c_2, c_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b$$

$$\parallel$$

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 = b \qquad x_2 = ?$$

$$\det [c_1 | x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 | c_3] = x_2 \det [c_1 | c_2 | c_3] =$$

$$\parallel$$

$$\det [c_1 | b | c_3]$$

Quindi $\quad x_2 = \dfrac{\det [c_1 | b | c_3]}{\det [c_1 | c_2 | c_3]}$. Similmente trovo x_1, x_3.

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Det}\, A = -2\, \mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -2\,(1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = 2$$

$$L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \Big/ 2 = \frac{(6-4)}{2} = 1 \qquad \text{etc.}$$

Formula di Cramer

Dimostrazione nel caso $n \times n$

Sostituisco $b = x_1 \left[c_1\right] + \dots + x_n \left[c_n\right]$ nella i-esima colonna di A e sviluppo il determinante

$$\mathrm{Det}\left[c_1 | \cdots | b | \cdots | c_n\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \mathrm{Det}\left[c_1 | \cdots | \underset{\substack{\uparrow \\ i \text{ esima posizione}}}{c_j} | \cdots c_n\right] = x_i \, \mathrm{Det}\left[c_1 | \cdots | c_i | \cdots | c_n\right].$$

tutti gli altri termini della sommatoria sono zero in quanto hanno due colonne uguali.

Quindi $\mathrm{Det}\left[c_1 | \cdots | \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{b} | \cdots | c_n\right] = x_i \, \mathrm{Det}\, A$, e

ricavo x_i.

$$\boxed{\text{Rango per riga} = \text{rango per colonne}}$$

$L : V \to W$ lineare $\qquad$ $\text{Rango}(L) = \dim \operatorname{Im}(L)$

$\mathcal{B} = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$ base di V

$\mathcal{C} = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$ base di W

$[L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ matrice associata $\quad m \times n$

Riduco a scalini

$$[L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\text{per riga}} N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\text{per colonna}} M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[L]\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Im}(L)$ corrisponde allo span delle colonne:

$w \in \operatorname{Im} L \iff$ coordinate di w rispetto a $\mathcal{C}$ sono nello span delle colonne.

Quindi

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} L &= \dim \text{span colonne } [L] \\ &= \dim \text{span colonne } M \quad (\text{perché } [L] \rightsquigarrow M \text{ con mosse di colonna}) \\ &= \#\text{ pivot di } M \\ &= \#\text{ colonne indipendenti di } M \text{ e di } L. \end{aligned}$$

continua $\hookrightarrow$

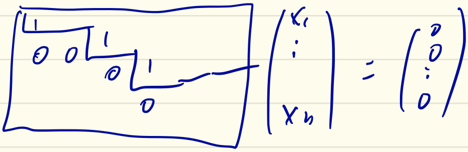
Ora metto in relazione il rango di L con le righe di $[L]$

Calcolo $\operatorname{Ker} L$:

$$[L] \xrightarrow{\text{Mosse Riga}} N$$

devo risolvere $[L]\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Questo sistema equivale a $N\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$



$\dim \operatorname{Ker} L$ = # variabili libere

= n − # pivot di N

per il teorema

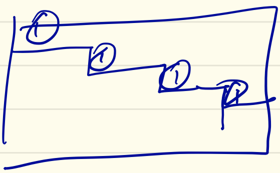
$$\dim \operatorname{Im} L + \dim \operatorname{Ker} L = n$$

$\Rightarrow$ # pivot di M + (n − # pivot di N) = n

$\Rightarrow$ # pivot di M = # pivot di N

$\Rightarrow$ Rango per colonna di L = Rango per riga di L.

Oss



per una matrice a scalini

(le righe con i pivot sono indipendenti

(le colonne con i pivot sono indipendenti.

Sviluppi di Laplace del determinante (vedi Gobbino p114)

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

- In ogni prodotto c'è sempre un elemento di ogni riga e un elemento di ogni colonna. Ci sono tutti i prodotti di questo tipo, che sono $n!$ (se la matrice è $n \times n$).

- Scelta dei segni:

  Consideriamo ad esempio ceg. Ha segno "$-$" perché se metto 1 nelle posizioni di c, e, g e zeri altrove, ottengo una matrice con determinante -1, ovvero

$$\operatorname{Det}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1$$

(perché devo fare un numero dispari di scambi di righe per farla diventare la matrice identità I).

Matrici elementari.

- Una matrice elementare è una matrice quadrata che si ottiene dalla matrice identità $I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ effettuando una mossa di Gauss di riga

- Mosse di Gauss di Riga:
  $R_i + \lambda R_j$: aggiungo alla riga i la riga j moltiplicata per λ
  λR_i : moltiplico per λ la riga i
  $R_i \leftrightarrow R_j$: scambio la riga i con la riga j.

- esempi di matrici elementari

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + 5R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [R_2 + 5R_3] = \text{Matrice associata alla mossa } R_2 + 5R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_3]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [R_1 \leftrightarrow R_3] = \text{Matrice associata alla mossa } R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[4R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [4R_2] = \text{Matrice associata alla mossa } 4R_2.$$

- Osservazione:
  lo stesso risultato si può ottenere con una mossa di colonna. Ad esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_3 + 5C_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [C_3 + 5C_2] = [R_2 + 5R_3]$$

In generale $[R_i + \lambda R_j] = [C_j + \lambda C_i]$.

Proposizione.

Effettuare una mossa di riga su una matrice M equivale a moltiplicare M a sinistra per una matrice elementare (di dimensioni compatibili)

ESEMPIO:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1+2R_2]{} \begin{bmatrix} a+2e & b+2f & c+2g & d+2h \\ e & f & g & h \end{bmatrix} = M'$$

$E = [R_1 + 2R_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ = matrice elementare associata alla mossa di riga.

Se parto da M (che è 2×4) ed effettuo la mossa $R_1 + 2R_2$ ottengo lo stesso risultato M' che moltiplicando a sinistra per la matrice elementare $E = [R_1 + 2R_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Verifica:

$$EM = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2e & b+f & c+2g & d+2h \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$$

Matrice Inversa.

A matrice quadrata $n \times n$.
La matrice inversa A^{-1}, quando esiste, è l'unica matrice tale che $A^{-1}A = I = AA^{-1}$ dove $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice identità.

Calcolo dell'inversa facendo mosse di riga

Formo la matrice $n \times 2n$ $(A \mid I)$.
Cerco con mosse di riga di ridurla alla forma $(I \mid B)$.
Se ci riesco B è l'inversa : $B = A^{-1}$.

$$(A \mid I) \underset{\text{Mosse di riga}}{\rightsquigarrow} (I \mid A^{-1})$$

Perchè funziona?

Sia E il prodotto delle matrici elementari corrispondenti alle mosse di riga

$$(A \mid I) \rightsquigarrow (I \mid B)$$

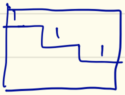
$$E(A \mid I) = (EA \mid EI) = (I \mid B)$$

Quindi $EA = I$ e $EI = B$.
Da $EA = I$ deduco $E = A^{-1}$.
Da $EI = B$ ottengo $E = B$.

Come estrarre una base di vettori colonna con mosse di riga

A = matrice $n \times m$ $\qquad A \underset{\text{mosse di riga}}{\rightsquigarrow} M$

Sia E un prodotto di matrici elementari tale che EA è a scalini per riga

$A \rightsquigarrow EA = M =$ 

Scrivo A, M come lista di vettori colonna

$A = [A^1 | A^2 \dots | A^m] \qquad M = [M^1 | M^2 | \dots | M^m]$

$EA = [EA^1 | \dots | EA^m] = [M^1 | M^2 | \dots | M^m]$

Una matrice invertibile manda vettori indipendenti in vettori indipendenti. E è invertibile.

Quindi se M ha i pivot in posizione

$i_1, \dots, i_k$

$\Rightarrow$ le colonne $\overset{EA^{i_1}}{\overset{\parallel}{M^{i_1}}}, \dots, \overset{EA^{i_k}}{\overset{\parallel}{M^{i_k}}}$ sono una base delle colonne di M

$\Rightarrow$ le colonne $A^{i_1}, \dots, A^{i_k}$ sono una base delle colonne di A. $\square$

siccome E è invertibile

Attenzione a cosa può succedere se faccio invece mosse di colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 - C_2]{C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4 + C_1]{C_3 + C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

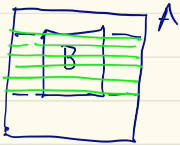
indipendenti

dipendenti

Calcolo del rango con i determinanti

- Se una matrice $n \times n$ A ha un minore B $k \times k$ con $\det B \neq 0$, allora $\text{rango}(A) \geq k$.

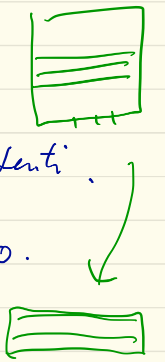
Dim:

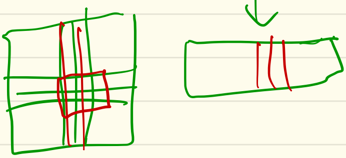


le righe di B sono indipendenti.
Quindi le corrispondenti righe di A sono indipendenti
Quindi rango $A \geq k$.

- Se rango $A \geq k$, esiste un minore $k \times k$ B con $\det B \neq 0$.

Dim: Scelgo k righe di A indipendenti.
Elimino le altre righe. Ottengo una matrice $k \times n$ di rango k.
Quindi ha anche k colonne indipendenti.
Elimino le altre colonne.
Ottengo un minore $k \times k$ con $\det \neq 0$.





Esempio (Gobbino p125)

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2\lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Studiare il sistema con parametro λ

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\lambda \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione:

Matrice del sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2\lambda & 2\lambda \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Det = 1

Ha soluzione se e solo se il rango di A è uguale al rango di $\left[A \middle| \begin{smallmatrix} 2 \\ 2\lambda \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. (teo di Rouché Capelli)

Per calcolare il rango posso usare i determinanti

$\det A = -\lambda + 2 + 2\lambda - 1 = \lambda + 1$ (sviluppo secondo la prima colonna)

(1) Se $\lambda \neq -1$, Rango A = Rango $A' = 3$

$\Rightarrow$ esiste una e una sola soluzione.

(2) Se $\lambda = -1$ sostituisco e controllo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

minore con Det $\neq 0$

Rango A = Rango $A' = 2$ infinite soluzioni.

Troviamo le soluzioni con mosse di riga

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

z libera

$3y + 3z = 3 \qquad y + z = 1 \qquad y = 1 - z$

$-x + y + 2z = 2 \qquad x = y + 2z - 2 = (1 - z) + 2z - 2$

$= z - 1$

Soluzioni: $\begin{pmatrix} z-1 \\ 1-z \\ z \end{pmatrix}$.

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

$f : V \to V$ lineare, scalari K

$\lambda \in K$ è <u>autovalore</u> di f se

esiste $v \neq 0$ $\quad f(v) = \lambda v$.

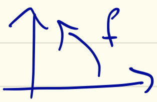
Un tale v si dice <u>autovettore</u> relativo a λ.

$V_\lambda := \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \}$ (Autospazio associato)

$= \{\text{autovettori associati a } \lambda\} \cup \{\overline{0}\}$.

<u>esempio</u>

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-y, x)$



non ci sono autovettori reali.

POLINOMIO CARATTERISTICO

$f: V \to V$ applicazione lineare, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base di V.

$A = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ matrice di f

$p_f(\lambda) = \det[A - \lambda I]$ polinomio caratteristico di f (ed A)

non dipende da come scelgo $\mathcal{E}$!

__Teorema__: le radici del polinomio caratteristico sono gli autovalori di f.

__Dim__:
$$f(v) = \lambda v \iff$$
$$A(v)_{\mathcal{E}} = \lambda (v)_{\mathcal{E}} \iff$$
$$(A - \lambda I)(v)_{\mathcal{E}} = 0 \iff$$

Quindi:

λ è autovalore $\iff \ker(A - \lambda I) \neq 0$

$\iff \det(A - \lambda) = 0$

$\iff p_A(\lambda) = 0$. $\square$

esempio. (Gobbino p156)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ applicazione lineare associata.

Cerco λ e $v \neq 0$ tale che

$$L_A(v) = \lambda v \qquad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Soluzione

$$L_A(v) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ -x+4y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = \lambda x \\ -x + 4y = \lambda y \end{cases} \qquad \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y = 0 \\ -x + (4-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -x & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

la posso scrivere come $A - \lambda I$ con $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ha sempre la soluzione $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Per avere soluzione $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ serve che

$\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \neq 0$, ovvero $\operatorname{Det}(A - \lambda I) = 0$

polinomio caratteristico

$$\operatorname{Det}(A - \lambda I) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - \lambda - 4\lambda + 4 + 2$$
$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6$$
$$= (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$.

Trovo gli autospazi V_{λ_1}, V_{λ_2}.

$\lambda_1 = 2.$

$Av = 2v$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 2 \\ -1 & 4-2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y libera

$-x+2y=0 \qquad x = 2y$

Soluzioni $\begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}$ $\qquad \text{span}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{autovettore}} = V_{\lambda_1} = V_2.$

$\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{Soluzioni} = \ker(A - 3I) = \ker\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \ker\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y libera, $x = y$ $\qquad$ Soluzioni $\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \text{span}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{autovettore}} = V_{\lambda_2} = V_3$

ESEMPIO DI RICERCA DI AUTOVALORI E AUTOVETTORI USANDO IL POLINOMIO CARATTERISTICO

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\left(= \text{matrice di } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} \right)$

- polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

- Autovalori

λ autovalore $\Leftrightarrow p(\lambda) = 0$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

- Autospazi - Sia λ un autovalore.

$V_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \underset{(1-\lambda)R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & \underbrace{(-\lambda)(1-\lambda)}_{=1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow V_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : (1-\lambda)x + y = 0 \right\}$

$\Rightarrow V_\lambda = \operatorname{span} \begin{pmatrix} -1/(1-\lambda) \\ 1 \end{pmatrix}$

ma $-\dfrac{1}{(1-\lambda)} = \dfrac{\lambda}{(1-\lambda)(-\lambda)} = \lambda$ (perché $p(\lambda) = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = 0$
$\Rightarrow (1-\lambda)(-\lambda) = 1$)

$\Rightarrow V_\lambda = \operatorname{span} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ per $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$.

- Autovettori: $v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

DIAGONALIZZAZIONE

<u>Teorema</u> $f : V \to V$ lineare $n = \dim(V)$
$\mathcal{E}$ = base di V (ad esempio base canonica di $V = \mathbb{R}^n$).
$\mathcal{B}$ = base di autovettori $v_1, \dots, v_n$ con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$A = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ matrice di f rispetto alla base $\mathcal{E}$.

allora

(1) $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{zeri} \\ & \ddots & \\ \text{zeri} & & \lambda_n \end{pmatrix}$ (Matrice Diagonale).

matrice di cambiamento di base $\mathcal{E} \rightsquigarrow \mathcal{B}$.

(2) esiste M matrice $n \times n$ tale che

$\boxed{M D M^{-1} = A}$. La matrice M si ottiene mettendo in colonna le coordinate degli autovettori: $M = \left[(v_1)_{\mathcal{E}} \middle| \dots \middle| (v_n)_{\mathcal{E}} \right]$

equivale a $D = M^{-1} A M$.

coordinate autovettori

Spiegazione del perché funziona:

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{id} & V & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{id} & V \\ \downarrow c_{\mathcal{B}} & & \downarrow c_{\mathcal{E}} & & \downarrow c_{\mathcal{E}} & & \downarrow c_{\mathcal{B}} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[M]{} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow[A]{} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow[M^{-1}]{} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

$\mathcal{E}$ = base iniziale
$\mathcal{B}$ = base di autovettori
$c_{\mathcal{E}}$ = coordinate rispetto ad $\mathcal{E}$
$c_{\mathcal{B}}$ = coordinate rispetto a $\mathcal{B}$

$$\underset{D}{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}} = \underset{M^{-1}}{[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}}\ \underset{A}{[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}}\ \underset{M}{[id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}}$$

(notare l'ordine: $M^{-1}AM\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ = prima applico M, poi A, poi M^{-1}).

$M = [id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \Rightarrow M(v_1)_{\mathcal{B}} = (v_1)_{\mathcal{E}} \Rightarrow M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (v_1)_{\mathcal{E}} \Rightarrow$ 1ª colonna di $M = (v_1)_{\mathcal{E}}$ etc.

Esempio (Fibonacci).

$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Considero la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}$$

Ottengo $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} F_3 \\ F_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} F_4 \\ F_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \dots$

$f\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}$, $ff\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 \\ F_2 \end{pmatrix}$ etc

$f^n\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$, ovvero $f^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$.

Passo alle matrici:

$$[f] = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Siccome $f^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$, $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$.

dove $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ volte}}$.

Per calcolare F_n basta saper calcolare A^n.

Come lo calcolo?

Cerco di diagonalizzare $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix}$$

$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sia ora $\mathcal{B}$ la base degli autovettori $\{v_1, v_2\}$.

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = ?$$

ricordiamo che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} (v_{\mathcal{B}}) = [fv]_{\mathcal{B}}$

$$(v_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (v_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (fv_1)_{\mathcal{B}} = (\lambda_1 v_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (fv_2)_{\mathcal{B}} = (\lambda_2 v_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D$$ Diagonale!

La matrice di un'applicazione lineare f rispetto a una base fatta di autovettori di f è sempre diagonale.

Vantaggi:

è facile calcolare D^n per le matrici diagonali $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ se $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

ESEMPIO DI DIAGONALIZZAZIONE. (Con formula $D = M^{-1}AM$)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = (x+y, x)$

$\mathcal{E}$ = base canonica di $\mathbb{R}^2$
$= \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$.

$[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

Polinomio caratteristico

$p(x) = p_f(x) = p_A(x) = \det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix}$

$= (1-x)(-x) - 1 = x^2 - x - 1$

Autovalori (radici di $p_f(x)$)

$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$.

Autospazi

$V_{\lambda_1} = \ker(A - \lambda_1 I) = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_{\lambda_2} = \ker(A - \lambda_2 I) = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Autovettori $v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Base di autovettori $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$.

$D = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Matrice M di cambiamento di base

$[id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \; (v_1)_{\mathcal{B}} = (v_1)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1^a$ colonna di M, etc.

$\Longrightarrow \quad M = [id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ora calcolo M^{-1} (pagina seguente)

Calcolo $M^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ con mosse di riga $[M | I] \rightsquigarrow [I | M^{-1}]$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & M^{-1} \end{array}\right]$$

oppure uso la formula
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Usando la formula ottengo:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

verificate che
$$M^{-1} A M = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

APPLICAZIONI DELLA DIAGONALIZZAZIONE:

Ci aiuta nel calcolo di A^n

ad esempio

$$A^3 = MD\cancel{M^{-1}}\cancel{M}D\cancel{M^{-1}}\cancel{M}DM^{-1} = MDDDM^{-1} = MD^3M^{-1}.$$

$$M^{-1} A M = D$$
$$\Downarrow$$
$$A = M D M^{-1}$$
$$\Downarrow$$
$$A^n = \underbrace{(MDM^{-1})(MDM^{-1}) \quad (MDM^{-1})}_{n \text{ volte}} = M D^n M^{-1} = M \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} M^{-1}$$

Quindi con 3 moltiplicazioni di matrici otteniamo $A^n = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ volte}}$.

Ricordiamo che se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

Fibonacci

Quindi abbiamo un metodo alternativo per calcolare F_n.

esempio diagonalizzabile in $\mathbb{C}$ ma non in $\mathbb{R}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 9 = (1-\lambda)^2 - (i3)^2$

$= (1-\lambda+i3)(1-\lambda-i3)$

autovalori $1+3i$, $1-3i$

$D = \begin{pmatrix} 1+3i & 0 \\ 0 & 1-3i \end{pmatrix}$ matrice diagonale simile ad A.

Autospazi: $V_{1+3i} = \ker(A-(1+3i)I) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$V_{1-3i} = \ker(A-(1-3i)I) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Autovettori

$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \in V_{1+3i}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \in V_{1-3i}$

Matrice di cambio base

$M = [id]^{\text{autov.}}_{\text{standard}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ $\quad \left([id]^{\text{autov.}}_{\text{st.}} (v)_{\text{aut.}} = (v)_{\text{st.}} \quad [id]^{\text{aut}}_{\text{st}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ etc} \right)$

$\Rightarrow M^{-1} = -\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{pmatrix}$ $\quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right)$

$\Rightarrow M^{-1} A M = D.$

$M^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1+3i & 0 \\ 0 & 1-3i \end{pmatrix}$

Siamo partiti con una matrice reale ma per diagonalizzarla abbiamo dovuto usare i complessi.

TRACCIA

La traccia di una matrice $n \times n$ è la somma degli elementi sulla diagonale. Essa si può anche ricavare dal polinomio caratteristico.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

autovalori

$$p_A(x) = \det(A - xI) = x^2 - x - 1 = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$
$$= x^2 - \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{\text{traccia}} x + \underbrace{\lambda_1 \lambda_2}_{\text{determinante}}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -1 = \det(A)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 = \text{traccia}(A).$$

In generale la traccia è il coefficiente del termine di grado $n-1$ con un segno ± 1, a seconda che n sia pari o dispari.

Somme dirette

Sono equivalenti:

Dati V_1, V_2 sottospazi di V, sono equivalenti

1) $V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\}$

2) Se $\bar{0} \neq v_1 \in V_1$ e $\bar{0} \neq v_2 \in V_2 \Rightarrow$ v_1, v_2 sono lin. indipendenti.

Dim $1 \to 2$

Se $a_1 v_1 + a_2 v_2 = \bar{0}$ con a_1, a_2 non entrambi nulli, allora se ad esempio $a_1 \neq 0$ avrei $v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 \in V_1 \cap V_2$ e $V_1 \cap V_2$ non sarebbe $\{\bar{0}\}$.

$2 \to 1$.

Se $V_1 \cap V_2 \neq \{\bar{0}\}$ sia $0 \neq v \in V_1 \cap V_2$ e scelgo $v_1 = v = v_2$. Chiaramente v_1, v_2 non possono essere indipendenti. $\square$

AUTOVETTORI CON AUTOVALORI DISTINTI SONO INDIPENDENTI

Teo. $f: V \to V$. Se $\bar{0} \neq v_1 \in V_{\lambda_1}$, $\bar{0} \neq v_2 \in V_{\lambda_2}$, ..., $\bar{0} \neq v_n \in V_{\lambda_n}$

e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sono diversi tra loro

allora $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti. (ovvero $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_n}$ sono "in somma diretta").

Dimostrazione:

- facciamolo prima con $n=2$

  Basta mostrare che $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{\bar{0}\}$.

  Se $v \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$, ho $f(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v$.

  $\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v = 0$. Siccome $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$

  ottengo $v = 0$.

- facciamo il caso generale per induzione su n.

  Supponiamo $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = \bar{0}$ (*)

  applico f / moltiplico per λ_1

(1) $a_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + a_n \lambda_n v_n = \bar{0}$; (2) $a_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + a_n \lambda_1 v_n = \bar{0}$

λ_1 non λ_n!

Sottraendo (1)-(2) si cancella il primo termine e ottengo

$$a_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \ldots + a_n (\lambda_n - \lambda_1) v_n = \bar{0}$$

Per ipotesi induttiva $a_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \ldots = a_n(\lambda_n - \lambda_1) = 0$ e siccome $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ per $i \neq j$, ottengo $a_2 = \ldots = a_n = 0$ e per la (*) anche $a_1 = 0$.

Molteplicità algebrica e geometrica

STUDIARE GAIFFI p 142 – 143

$f: V \to V$ endomorfismo, $n = \dim(V)$, $\mathcal{E}$ = base di V

$V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$ autospazio

λ è autovalore se $V_\lambda \neq \{\bar{0}\}$.

$A = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ matrice di f

Ad esempio se $V = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \right\}$ base canonica.

$p_f(x) = p_A(x) = \det(A - xI)$ polinomio caratteristico (non dipende da quale base scelgo).

Sia k massimo tale che $(x-\lambda)^k \mid p_f(x)$ (con λ autovalore)

k si dice molteplicità algebrica dell'autovalore λ $ma(\lambda)$

La molteplicità geometrica è la dimensione di V_λ. $mg(\lambda)$

$\Rightarrow$

① $mg(\lambda_i) \leq ma(\lambda_i)$ per ogni autovalore λ_i (vedere dispense Gaiffi)

② f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $p_f(x)$ si fattorizza nel prodotto di fattori lineari e $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$ per ogni autovalore λ_i

Spiegazione di (2):

Il grado di $p_f(x)$ è n.

molteplicità algebriche

$$p_f(x) = (x-\lambda_1)^{a_1}(x-\lambda_2)^{a_2} \cdots (x-\lambda_k)^{a_k}\, q(x)$$

autovalori

Se $a_1 + \dots + a_k = n \Rightarrow q(x) = 1$. Inoltre:

$$n \geq a_1 + \dots + a_k \overset{①}{\geq} \dim(V_{\lambda_1}) + \dots + \dim(V_{\lambda_k})$$

f diagonalizzabile $\Longleftrightarrow V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k} = V$

Questo succede $\Longleftrightarrow \dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_k} = n$

$\Longleftrightarrow a_1 + \dots + a_k = n$ e $a_i = \dim V_{\lambda_i}$ $\forall i$.

Esercizio.

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare e consideriamo le basi di $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{B} = \{(2,3), (1,0)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,4), (0,3)\}$.

Supponiamo che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Trovare $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = ?$

Soluzione: $M = [f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$.

1^a colonna di $M = M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \left[f\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} = ?$

Devo calcolare $f\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Quello che conosco è $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ quindi per calcolare $f\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ devo scrivere $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 4/3,\ y = -\frac{8}{3} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -8/3 \end{pmatrix}$

$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/3 \\ -8/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 8/3 - 24/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -16/3 \end{pmatrix} = \left[f\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}$

Quindi $f\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ è quel vettore che scritto nella base $\mathcal{B}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 4/3 \\ -16/3 \end{pmatrix}$

ovvero $f\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{16}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 - 16 \\ 4/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48/3 \\ 4/9 \end{pmatrix}$

Ora devo scrivere $\begin{pmatrix} 48/3 \\ 4/9 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}$, ovvero risolvere

$\begin{pmatrix} 48/3 \\ 4/9 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La soluzione $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ che trovo è la prima colonna di M. Procedo analogamente per la seconda colonna.

Determinante di Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha$ diversi tra loro.

$$\Rightarrow \quad \det A = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Dim: sottraggo ad ogni riga R_i la riga precedente moltiplicata per α_1

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \cdots & \alpha_n - \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \cdots & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) & \cdots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix}$$

divido la colonna C_2 per $\alpha_2 - \alpha_1$ la C_3 per $\alpha_3 - \alpha_1$ etc, in modo da far venire $0\ 1\ 1 \dots 1$ sulla seconda riga

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 1 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha_2^{n-2} & & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix} (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n - \alpha_1)$$

sviluppo secondo la prima riga

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_2 & & \alpha_n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_2^{n-2} & & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix} (\alpha_2 - 1) \cdots (\alpha_n - \alpha_1)$$

per induzione

$$= \left(\prod_{2 \le i < j \le n} (\alpha_j - \alpha_i) \right) (\alpha_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n - \alpha_1) = \prod_{1 \le i \le j \le n} (\alpha_j - \alpha_i).$$