Matematica discreta 24/03/2017

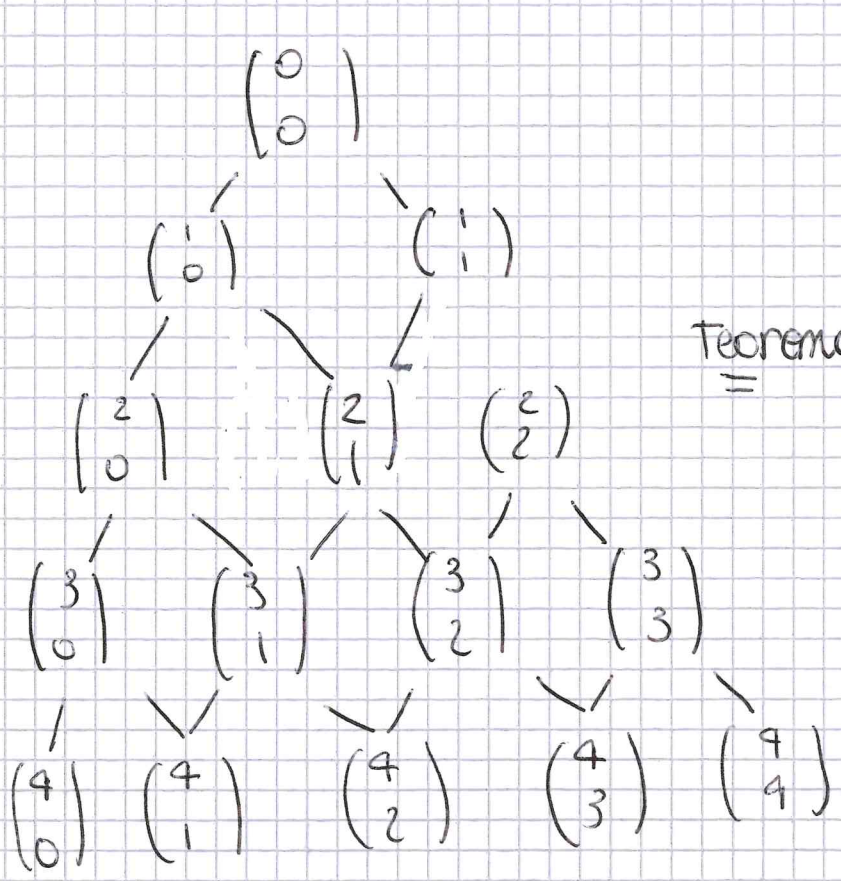
Binomio di Newton

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$ coefficiente binomiale

es:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2! \cdot \cancel{4!}}$$

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$$



Teorema

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

dimostrare che entrambi gli alberi seguono la stessa regola.

1) I bordi sono equivalenti ad 1.

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = 1 = \binom{n}{n}$$

2) numeri centrali:

$$\binom{n}{i} \quad \text{con } 0 < i < n$$

↳ = alla somma di quelli precedenti

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}$$

semplice conto: ↓

$$\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} + \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}$$

$i! = (i-1)!\, i$

$(n-i)! = (n-i-1)!(n-i)$

$$\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i-1)!(n-i)} + \frac{(n-1)!}{i\,(i-1)!(n-1-i)!} =$$

$$\frac{i\,(n-1)! + (n-i)(n-1)!}{(i-1)!(n-i-1)!(n-i)\,i} =$$

$$\frac{(n-1)!\,(\cancel{i}+n-\cancel{i})}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \binom{n}{i} \checkmark$$

Quindi gli $\binom{n}{i}$ formano il Triangolo di Tartaglia/Pascal

Teorema

$\binom{n}{i}$ è un intero positivo.

si dimostra per induzione su n.

Teorema:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

$P(n)$

$P(0)$, $P(1)$ fatto.

dimostrazione

$P(n)$ avendo i casi base: $n>0$
(ipotesi induttiva)

$$(x+y)^n = (x+y)\underbrace{(x+y)^{n-1}}_{\hookrightarrow P(n-1)} =$$

$$= (x+y)\left[\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} y^i\right] =$$

$$= x\left[\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} y^i\right] + y\left[\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} y^i\right] =$$

$$= x\left[\binom{n-1}{0} x^{n-1} \cancel{y^0}^{\,1} + \binom{n-1}{1} x^{n-2} y^1 + \dots + \binom{n-1}{n-1} \cancel{x^0}^{\,1} y^{n-1}\right] +$$

$$+ y\left[\binom{n-1}{0} x^{n-1} \cancel{y^0}^{\,1} + \binom{n-1}{1} x^{n-2} y^1 + \dots + \binom{n-1}{n-1} \cancel{x^0}^{\,1} y^{n-1}\right] =$$

porto dentro la x che mi fa aumentare l'esponente delle x di 1.

$$= \left[\binom{n-1}{0} x^n + \binom{n-1}{1} x^{n-1} y + \dots + \binom{n-1}{n-1} x^1 y^{n-1}\right] +$$

$$+ \left[\binom{n-1}{0} x^{n-1} y^1 + \dots + \binom{n-1}{n-2} x y^{n-1} + \binom{n-1}{n-1} \cancel{x^0}^{\,1} y^n\right]$$

$$= \cancel{\binom{n-1}{0}} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \cancel{\binom{n-1}{n-1}} y^n$$

$1 = \binom{n}{0}$ $\qquad$ $1 = \binom{n}{n}$

$$= x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + y^n.$$

$$\Downarrow \quad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

esattamente la formula cercata ✓.

con le combinazione:

$$(x+y)^n = x(x+y)^{n-1} + y(x+y)^{n-1} =$$

$$= x\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{n-1-i}y^i + y\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{n-1-i}y^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{n-i}y^i + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{n-i-1}y^{i+1} =$$

$$= x^n + \sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{n-1-j}x^j + \sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}x^{n-1-i}y^i + y^{n-1}$$

$\vdots$

<u>Torna!</u>

es:

$$\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i} = \cancel{\binom{10}{0}} + \cancel{\binom{10}{1}} + \binom{10}{2} + \dots + \binom{10}{10} =$$

$$1 + 10 + \frac{10\cdot 9}{2} + \dots$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$= \sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}1^{10-i}1^i =$$

$$= (1+1)^{10} = 2^{10}$$

es:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 \quad 1
\end{array}$$

somma alternata di una riga:

$1-5+10-10+5-1=0$

perché speculare

solo per righe dispari

$1-6+15-20+15-6+1=0$

dimostrazione:

per le righe <u>pari</u> e <u>dispari</u>

$$\binom{6}{0}-\binom{6}{1}+\binom{6}{2}-\binom{6}{3}+\binom{6}{4}-\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=0$$

in generale:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\dots+(-1)^n\binom{n}{n}=$$

se dispari ci sarà segno −.

se pari ci sarà segno +.

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(1)^{n-i}(-1)^i=(1-1)^n=0^n=0 \quad \checkmark$$

termine meno per far somigliare la sommatoria al binomio di Newton.

es: p primo

posso dire che $p \mid \binom{p}{i}$?

$$7 \mid \binom{7}{3} \ ? \qquad \frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{7!}{3!\,4!}=$$

$$=\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5\cdot\cancel{4!}}{\cancel{3!}\,\cancel{4!}}=\frac{7\cdot 5}{7}=5 \checkmark$$

se $i=0$ no

se $i=p$ no

se $0<i<p$ <u>sì</u> e funziona sicuramente se p è primo.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$$\overset{\shortparallel}{\binom{4}{2}}$$

$$4 \nmid \binom{4}{2} \qquad \frac{4!}{2!\,2!}=6$$

$$\frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \binom{n}{i} \qquad \frac{\cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot 1}{\cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 6$$

Teorema se p è primo e $i \neq 0, p$

$0 < i < p$

allora $p \mid \binom{p}{i} = \frac{p!}{(p-i)!\,i!}$

dimostrazione:

$$p! = \underbrace{\binom{p}{i}}_{\in \mathbb{N}} (p-i)!\,i!$$

quindi possiamo ragionare per divisibilità

per il teorema che
se un primo divide un prodotto allora divide uno dei fattori

$p \mid p!$? ovvio.

quindi $p \mid \binom{p}{i}(p-i)!\,i!$

altro prodotto

$p \mid \binom{p}{i}$ o $p \mid i!$ o $p \mid (p-i)!$

impossibile perché $0 < i < p$ e p è primo.

stesso ragionamento $p - i < p$

p dovrebbe dividere uno dei fattori ma $p - i < p$.

Quindi

$p \mid \binom{p}{i}$ <u>sicuro</u>

con $0 < i < p$.

$\binom{p}{i} \equiv 0 \mod (p) \rightarrow \binom{p}{i}$ è multiplo di p.

es:

$$(x+y)^p \equiv \ ? \mod (p)$$

con p primo.

$$= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} x^{p-i} y^i =$$

$$= \binom{p}{0} x^p + \underbrace{\binom{p}{1}}_{} x^{p-1} y + \underbrace{\dots}_{\dots} + \underbrace{\binom{p}{p-1}}_{} x y^{p-1} + \binom{p}{p} y^p \underset{\mod p}{\equiv}$$

sono tutti congrui a (p).

$$\binom{p}{0} x^p + \binom{p}{p} y^p \equiv x^p + y^p \ (p)$$

teorema:

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \ (p)$$ → vale anche con più variabili

i termini intermedi si cancellano per il teorema precedente che $p \mid \binom{p}{i}$.

es:

$$(x+y+z)^p = ((x+y)+z)^p \equiv (x+y)^p + z^p \ (p)$$

$$\Rightarrow \equiv x^p + y^p + z^p \ (p)$$

teorema

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^p \equiv x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p \ (p)$$

$P(n)$ per induzione su n.

$P(2)$ e $P(3)$ fatti.

$P(1)$ banale.

Raggruppo i primi $n-1$

$$((x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + x_n) \underset{P(2)}{\equiv} (x_1 + \dots + x_{n-1})^p + x_n^p \underset{P(n-1)}{\equiv}$$

$$\equiv x_1^p + \dots + x_{n-1}^p + x_n^p \ (p) \quad \square$$

con tutti $x = 1$

$$\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n}{}^p \equiv \underbrace{1^p+1^p+1^p+\dots+1^p}_{\equiv n} \ (p)$$

piccolo teorema di Fermat:

$$n^p \equiv n \ (p) \quad \text{se } p \text{ è primo}$$

es: $2^{17} \equiv 2 \ (17)$.

posso dividere per 2: → perché 17 è primo.

$$2^{16} \equiv 1 \ (17)$$

Domanda

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (p) \quad ?$$

ALGEBRA lineare 29/03/2017

Teorema

$L: V \to W$ lineare

$$\dim(\ker(L)) + \dim(\operatorname{Imm} L) = \dim V$$

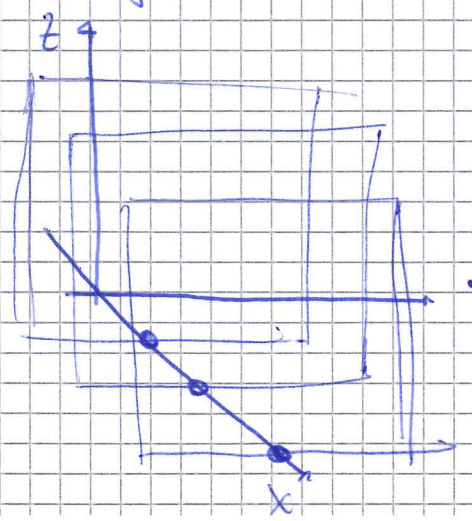
es: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\left.\begin{array}{l} \ker(L) = 2 \\ \operatorname{Imm}(L) = 1 \end{array}\right\}$ dimensioni

Trovare una funzione con queste caratteristiche

$\ker(L)$ = piano di yz

Immagine (L) = l'asse x.



$(1,0,0) \xrightarrow{L} (1,0,0)$

$(0,1,0) \xrightarrow{L} (0,0,0)$

$(0,0,1) \xrightarrow{L} (0,0,0)$

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = L\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= xL\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + yL\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + zL\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$L(x,y,z) = (x,0,0)$$

tutto il piano zy va in 0

$$\mathrm{Ker}(L) = \{(a,b,c) \mid L(a,b,c) = (0,0,0)\} =$$

$$= \{(a,b,c) \mid (a,0,0) = (0,0,0)\} =$$

$$= \{(a,b,c) \mid a = 0\} = \{(0,b,c)\}$$

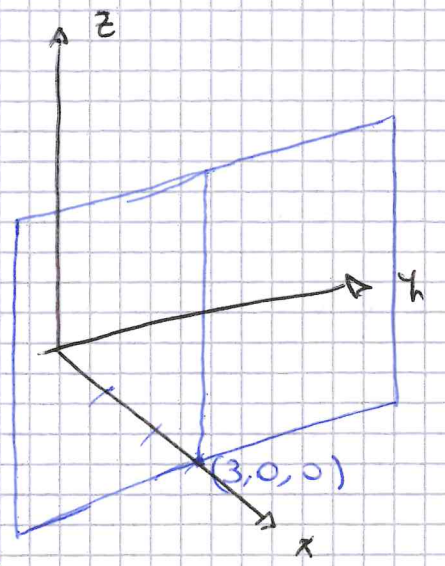
punti sul piano yz

$$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \left\{ b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Imm}(L) = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{span}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

output.



$$L\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$$

in ottanta

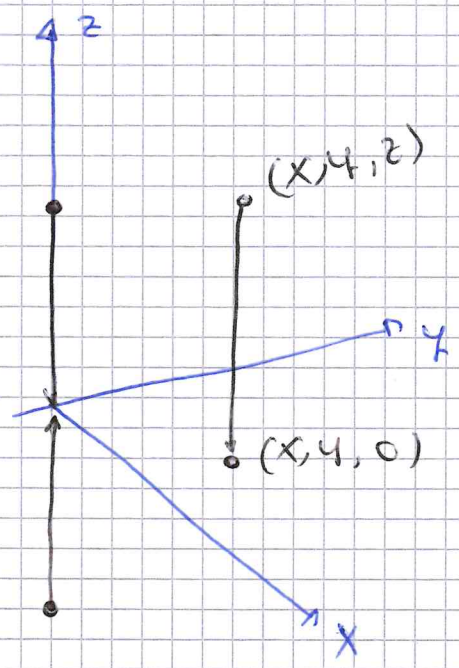
$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

esattamente quello che fa L.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}$$

es: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\left.\begin{array}{l} \ker(L) = 1 \\ \mathrm{Imm}(L) = 2 \end{array}\right\}$ dimensione



$\ker(L)$ = asse z perché dim = 1 quindi è una retta

↓

tutti gli elementi di z finiscono in $\emptyset$.

$\mathrm{Imm}(L)$ = piano x y.

$L = (x, y, z) = (x, y, 0)$

$\ker(L) = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

$\mathrm{Imm}(L) = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

Ker schiaccia tutti i punti in un solo punto.
L'imm è l'insieme dei punti dopo l'applicazione di L.

Proposizione:

Spazio vettoriale W
sottospazi $U, V \subseteq W$

$U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$

$U \cap V = \{z \mid z \in U \wedge z \in V\}$

Se sappiamo la dimensione della somma ci possiamo ricavare quella dell'intersezione.

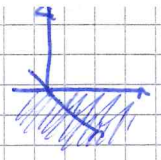
La somma $U + V$ si dice diretta se

$U \cap V = \{\bar{0}\} \Rightarrow$ scrivo $U \oplus V$

↓

somma diretta

es: $W = \mathbb{R}^3$ $\quad U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$



$V = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

$U + V$ è diretta? $\quad U + V = \mathbb{R}^3$

$U \cap V = \text{span}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \neq \{\bar{0}\}$ non è diretta

$U =$ asse x $= \text{span}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$V =$ piano y, z $= \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

$U + V = ?$ diretta? $\quad V + U = \mathbb{R}^3 = \text{span}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

sommiamo i vettori degli span.

e $U \cap V = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

quindi è <u>diretta</u>

$\underline{\underline{U \oplus V}} = U + V$

sono più facili da gestire

la sua dimensione

$\dim(U \oplus V) = \dim(U) + \dim(V)$

dimostrazione:

Sia $u_1, \dots, u_n$ una base di U $\quad U, V \subset W$

$v_1, \dots, v_k$ una base di V

$U = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$

$V = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$

$U + V = \text{span}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_k)$

quindi

$\dim(U + V) \leq n + k$

al massimo sarà $n+k$

Se $U \cap V = \{\bar{0}\}$

allora $\dim(U + V) = n + k$

Base di $U + V$ è $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_k\}$.

per essere una base devono essere
<u>indipendenti</u>, e <u>generanti</u> → assio.

se $a_1 u_1 + \dots + a_n u_n + b_1 v_1 + \dots + b_k v_k = 0$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_k = 0$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i u_i}_{U} = \underbrace{\sum_{j=1}^{k} -b_j v_j}_{V}$$

siccome è un'uguaglianza tutto sta nell'intersezione ma $U \cap V = \{\bar{0}\}$

$\sum a_i u_i = 0$ $\qquad$ $\sum b_j v_j = 0$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

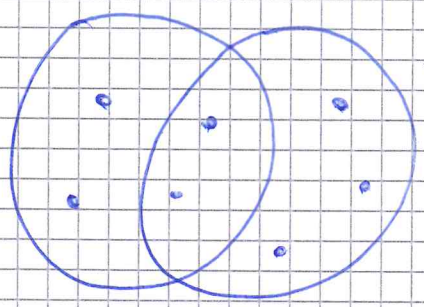
$\forall a_1 \dots a_i = 0$ $\qquad$ $\forall b_j \dots b_j = 0$

~~Prodotto cartesiano tra spazi vettoriali~~

GRASSmann

↳ più è grande la somma più è piccola è l'intersezione.

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$



7 è l'unione

$5+4-2$

quella in comune

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

es: $\mathbb{R}^4$ spazio

$V, W \subset \mathbb{R}^4$ sottospazi

V = soluzioni di $\begin{cases} -x-y+3t=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$

(x, y, z, t)

W = soluzioni span $\underset{w_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$\dim(V \cap W)$?

$\dim(V + W)$?

Calcolare anche la base

Per W già ci sono: w_1 e w_2 sono indipendenti

$$a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 = 0$$
$$a_1 = 0$$

$$a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot (-2) = 0$$
$$a_2 = 0$$

$\dim(W) = 2$

$\dim(V) = ?$ Faccio la matrice del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R2+R1}$$

pivot $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ è a scalini

pivot

$\underline{t}$ e $\underline{z}$ sono <u>libere</u>

$\dim(V) = 2 \rightarrow$ dato dalle variabili libere

Per cercare le basi dobbiamo fare i conti:

$$\begin{pmatrix} -2(-z-3t)-z \\ -z-3t \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+6t \\ -z-3t \\ z \\ t \end{pmatrix} =$$

$$= z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soluzioni $\Rightarrow$ $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\downarrow$

sono indipendenti $\Rightarrow$ basi.

Intersezione e somma:

$$V \cap W = ?$$

$w_1 \in V$?

$$\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \rightarrow$$ sostituisco nel sistema e guardo se è verificato

$2 \rightarrow x$
$0 \rightarrow y$
$1 \rightarrow z$
$1 \rightarrow t$

$$\begin{cases} 2+0+1=0 & \text{no} \\ -2-0+3=0 & \text{no} \end{cases}$$

$w_1 \in V$?

$$\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$3 \rightarrow x$
$-2 \rightarrow y$
$-2 \rightarrow z$
$0 \rightarrow t$

$$\begin{cases} 3-4-2=0 & \text{no} \\ -3+2+0=0 & \text{no} \end{cases}$$

prendiamo $w \in span\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\\-2\\0\end{pmatrix}$

controllo se w risolve il sistema

$$w = a\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a+3b\\-2b\\a-2b\\a\end{pmatrix}$$

generico vettore di W

$\downarrow$

guardo se può stare in V.

sostituisco le coordinate di w nel sistema

$$\begin{cases} 2a+3b+2(-2b)+a-2b=0 \\ -2a-3b+2b+3a=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a-3b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=b \\ 3a-3a=0 \end{cases}$$

quando $a=b$ il vettore sta in W e V.

$$w = \begin{pmatrix}2a+3a\\-2a\\a-2a\\a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\\1\end{pmatrix} \in V \in W$$ al variare di a.

$$V \cap W = span\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim(V \cap W) = 1$

Per Grassmann

$$\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$$

$$\hookrightarrow = 2 + 2 - 1 = 3$$

per trovare una base si faceva lo $span(V) + span(W) \Rightarrow$ i 4 vettori di cui 1 era superfluo.

Matematica discreta 30/03/2017

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$ Binomio di Newton

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

coefficienti binomiali

- Se p è primo $\quad p \mid \binom{p}{i}$

$$\Rightarrow \binom{p}{i} \equiv 0 \ (p)$$

- $(x+y)^p \rightarrow$ primo $\equiv x^p + y^p \ (p)$

- $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^p \equiv x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p \ (p)$

dimostrato per induzione su p.

- $\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n \text{ termini}}{}^p = 1^p + \dots + 1^p \ (p)$

$n^p = n \ (p)$ Piccolo teorema di Fermat

$$3^{17} \equiv 3 \ (17)$$

$$\Downarrow$$

$$3^{16} \equiv 1 \ (17)$$

possibile perché 3 e 17 non hanno divisori comuni.

dim $\quad n^p \equiv n \ (p)$

se $n \not\equiv 0 \ (p) \Rightarrow$ non è multiplo

allora possiamo dividere per n

$$\underline{n^{p-1} \equiv 1 \ (p)}$$ Piccolo teorema di Fermat

es: $5x \equiv 3^{78} \ (143)$ risolvere

$143 = 11 \cdot 13$

Regola:
se $\mathrm{mcd}(m_1, m_2) = 1$
$a \equiv b \ (m_1 \cdot m_2)$
$\Updownarrow$
$\begin{cases} a \equiv b \ (m_1) \\ a \equiv b \ (m_2) \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x \equiv 3^{78} \ (13) \\ 5x \equiv 3^{78} \ (11) \end{cases}$$

così abbiamo i moduli primi

applicabile il piccolo teorema di fermat.

$3^{12} \equiv 1 \ (13)$

12 è il modulo -1 $(13-1)$.

$78 = 6 \cdot 12 + 6$

$3^{78} = 3^{12 \cdot 6 + 6} = (3^{12})^6 \cdot 3^6 \equiv 3^6 \ (13)$

$1 \to 1^6 = 1$

chi è il minimo $n > 0$ tale che $3^n \equiv 1 \ (13)$?

deve essere un divisore di 12

$3^3 \equiv 1 \ (13)$

$(3^6) = (3^3)^2 \equiv 1$

$$\begin{cases} 5x \equiv 1 \ (13) \\ 5x \equiv 3^{78} \ (11) \end{cases}$$

$3^{78} \bmod 11 \to 3^{10} \equiv 1 \ (11)$

ma il più piccolo?

3	3^2	3^3	3^4	3^5
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
3	9	5	4	1
	$\shortparallel$			
	-2			

$3^5 \equiv 1 \ (11)$ ma $3^{78} = (3^5)^{15} 3^3 = 1 \cdot 3^3 \equiv 3^3$

$$3^5 \equiv 5 \ (11)$$

il sistema è diventato

$$\begin{cases} 5x \equiv 1 \ (13) \\ \underline{5x \equiv 5 \ (11)} \end{cases}$$

possiamo semplificare il 5 → 5 coprimo con 11

$$\begin{cases} 5x \equiv 1 \ (13) \\ x \equiv 1 \ (11) \end{cases}$$

$$x = 1 + k11$$

sostituisco nella prima equazione:

$$5(1 + k11) \equiv 1 \ (13)$$

$$5 + 55k \equiv 1 \ (13)$$

$$55k \equiv 9 \ (13)$$

$$3k \equiv 9 \ (13)$$

divido per 3

$$k \equiv 3 \ (13)$$

$$k = 3 + 13l$$

sostituisco nella x

$$x = 1 + 11(3 + 13l)$$

$$x = 1 + 33 + 143l$$

$$x = 34 + 143l$$

$$x \equiv 34 \ (143)$$ soluzione finale

RIPASSO:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \ (m_1) \\ x \equiv a_2 \ (m_2) \end{cases}$$

se m_1 e m_2 non hanno fattori comuni possiamo risolvere il sistema.

il sistema è risolubile quando

$$mcd(m_1, m_2) \mid a_1 - a_2$$

Se x_0 è una soluzione le altre si ottengono aggiungendo un multiplo del minimo comune multiplo

$$x_0 + k\, mcm(m_1, m_2)$$

$$x \equiv x_0 \left(mcm(m_1, m_2)\right)$$

se m_1, m_2 sono coprimi allora il modulo sarà $m_1 \cdot m_2$.

$[a, b] = mcm(a, b)$
$(a, b) = MCD(a, b)$

$$[3^5 \cdot 5^7, 3^4 \cdot 5^6 \cdot 17^2] = 3^5 \cdot 5^7 \cdot 17^2$$ esponente più grande

$$(3^5 \cdot 5^6, 3^4 5^7 \cdot 17^2) = 3^4 \cdot 5^6$$

$mcm \cdot mcd = a \cdot b$
$[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$. teorema

$$[a, b] = \frac{a \cdot b}{(a, b)}$$

questo lo calcoliamo con Bezout

dimostrazione:
Prima lemma: $a, b \in \mathbb{Z}$
1

$$d = (a, b)$$

$$a' = \frac{a}{(a, b)} \qquad b = \frac{b}{(a, b)}$$

$$(a', b') = 1$$ perché?

abbiamo già diviso per il massimo comun divisore possibile.

es: $(\underset{a}{80}, \underset{b}{60}) = 20$

$$a' = \frac{80}{20} = 8 \qquad b' = \frac{60}{20} = 3$$

$$mcd(8, 3) = 1$$

dimostrazione del lemma ①:

sia $c \in \mathbb{Z}$ tale che

$$c \mid a', b'$$

$$c \cdot \underbrace{(a,b)}_{d} \mid a' \underbrace{(a,b)}_{d}, b' \underbrace{(a,b)}_{d}$$

ma $a'd = a$

e $b'd = b$ $\Rightarrow$ $cd \mid a, b$

$\Downarrow$

$c = 1$ perché d era già il massimo comun divisore.

altro lemma ②:

$$(a,b) = 1$$

$$a \mid c \quad e \quad b \mid c$$

$\Downarrow$

$ab \mid c$ solo se non hanno fattori comuni.

[dimostrazione lemma ②:

$1 = ax + by$ per Bezout]

Dimostrazione del teorema:

$$[a,b] \cdot (a,b) = a \cdot b$$

$$[a,b] = \frac{ab}{(a,b)}$$

con numeri:

$a = 3^5 5^6$

$b = 3^4 5^7 17^2$

$$\begin{cases} (a,b) = 3^4 \cdot 5^6 \\ [a,b] = 3^5 \cdot 5^7 \cdot 17^2 \end{cases}$$

moltiplico

$$3^4 \cdot 5^6 \cdot 3^5 \cdot 5^7 \cdot 17^2$$

$$\| \quad a \cdot b = \underbrace{3^5 \cdot 5^6}_{a} \cdot \underbrace{3^4 \cdot 5^7 \cdot 17^2}_{b}$$

da una parte considero il massimo e poi il massimo tra gli esponenti e sommandoli viene sempre la stessa cosa.

$$\min(\alpha, \beta) + \max(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$$

es:

$$\begin{cases} 5x \equiv 4 \ (13) \\ 6x \equiv 2 \ (7) \end{cases}$$

- non si può risolvere
- la soluzione sarà del tipo

$$x \equiv ? \ [m_1, m_2]$$

mcm tra i moduli

<u>risolvere!</u>

es:

$$\begin{cases} 5x \equiv 5 \ (6) \\ 3x \equiv \ \ (10) \end{cases}$$

Per quali a si risolve il sistema?

1) Cerchiamo di risolvere singolarmente le congruenze.

$$5x \equiv 5 \ (6)$$

$$x \equiv 1 \ (6)$$

$3x \equiv a \ (10)$ l'inverso di 3 (10) è 7 e moltiplico:

$$\begin{cases} x \equiv 7a \ (10) \\ x \equiv 1 \ (6) \end{cases}$$

$\mathrm{mcd}(6,10) \mid 1-7a$?

se sì $\Rightarrow$ si può risolvere

$2 \mid 1-7a$

Si risolve da dispari.

caso in cui $a=1$

$$\begin{cases} 5x \equiv 5 \ (6) \\ 3x \equiv 1 \ (10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 1 \ (6) \\ x \equiv 7 \ (10) \end{cases}$$ > con le operazioni già fatte

$$x = 1 + 6k$$

sostituisco nella seconda

$$1 + 6k \equiv 7 \ (10)$$

$$6k \equiv \quad (10)$$

$\Downarrow$ devo dividere i 3 numeri per 2.

$$3k \equiv 3 \ (5)$$

adesso sono coprimi 3 e 5

$$k \equiv 1 \ (5)$$

$$k = 1 + 5\ell$$

rimpiazzo

$$x = 1 + 6(1 + 5\ell)$$

$$x = 7 + 30\ell$$

$$x \equiv 7 \ (30)$$

$\downarrow$

esattamente <u>mcm(10, 6)</u>

GENERALE:

$$\begin{cases} x \equiv a \ (m_1) \\ x \equiv b \ (m_2) \end{cases}$$

supponiamo di trovare soluzioni particolari

x_0 e x_1

facendo la differenza

$$\begin{cases} x_0 - x_1 \equiv 0 \ (m_1) \\ x_0 - x_1 \equiv 0 \ (m_2) \end{cases}$$ $\Rightarrow$ $x_0 - x_0$ è multiplo sia di m_1 che di m_2

$x_0 - x_1$ è multiplo di $[m_1, m$

se conosco x_0, x_1 lo ricavo aggiungendo un multiplo del mcm(m_1, m_2).

$$x_1 = x_0 + k[m_1, m_2]$$

es:

$$3^x \equiv 2 \ (7)$$

con il piccolo teorema di fermat:

$$3^x \equiv 3^2 \ (7)$$

Il minimo n t.c.

$$3^n \equiv 1 \ (7) \quad \text{è} \quad n = 6.$$

vado prima

$$\underline{3^x \equiv \boxed{1} \ (7)}$$

$$x = 6k$$

$$3^{6k} = (3^6)^k \equiv 1 \ (7)$$

$x \equiv 0 (6) \rightarrow$ le soluzioni vanno di 6 in 6.

ora guardo

$$3^x \equiv 2 \ (7)$$

$$\downarrow$$

$$3^x \equiv 3^2 \ (7)$$

$$3^{x-2} \equiv 1 \ (7)$$

$$x - 2 \equiv 0 \ (6) \rightarrow 2 + 6k = x$$

quindi:

$$3^x \equiv 2 \ (7)$$

$$\downarrow$$

$$3^x \equiv 3^2 \ (7)$$

$$\downarrow$$

$$x \equiv 2 \ (6)$$

si cambia il modulo.

funziona anche con $x < 0$?

$$x = -4 \equiv 2 (6) \qquad 3^{-4} \equiv 2 (7) \ ?$$

$$(3^{-1})^4 = 3^{-4}$$

chi è 3^{-1} mod 7?

$\rightarrow 5$ $\qquad 3^{-4} = (3^{-1})^4 = 5^4$

è esattamente l'inverso

$$3 \cdot 5 \equiv 1 \ (7)$$

ESERCITAZIONE 4/04/2017

$f: [\mathbb{Z}/(7)]^4 \longrightarrow [\mathbb{Z}/(7)]^3$ lineare.

$\downarrow$

spazio vettoriale su $\mathbb{Z}/(7)$

$\downarrow$

vettori con 4 coordinate che stanno in $\mathbb{Z}/(7)$

Possiamo associargli una matrice rispetto alle basi canoniche

$(1, 0, 0, 0)$
$(0, 1, 0, 0)$ di $[\mathbb{Z}/(7)]^4$
$(0, 0, 1, 0)$
$(0, 0, 0, 1)$

$(1, 0, 0)$
$(0, 1, 0)$ di $[\mathbb{Z}/(7)]^3$
$(0, 0, 1)$

$$\underset{3\times 4}{[f]} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

trovare base di $\ker(f)$, $\mathrm{Imm}(f)$

$\ker(f) \subseteq [\mathbb{Z}/(7)]^4$

$\mathrm{Imm}(f) \subseteq [\mathbb{Z}/(7)]^3$

Ker (f)

Vettori che vengono mandati in $\emptyset$

Sistema omogeneo ↓ soluzioni del sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}/(7)^4 \;\middle|\; L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$3^{-1} \bmod 7 = 5$

$3 \cdot 5 \equiv 15 \equiv 1$

dividere 3 = moltiplicare 5

$$\xrightarrow[R3-R1]{R2-3R1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & +1 & +2 & +3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R3-(3^{-1}R2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$z \quad t$ → variabili libere = dim(Ker)

Ker ha 49 elementi

t si può scrivere in 7 modi

z si può scrivere in 7 modi

⇓

$7 \cdot 7 = 49$

$$\begin{pmatrix} -2y - 5z - 2t \\ -2z - 3t \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(-2z - 3t) - 5z - 2t \\ -2z - 3t \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4z + 6t - 5z - 2t \\ -2z - 3t \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z + 4t \\ -2z - 3t \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

divido i contributi

$$z\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

base del ker.

Immagine (f).

↳ span delle colonne (con le basi standard)

$$\text{span } f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

base del dominio

$$= \text{span}\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&5&2\\3&2&0&1\\1&1&3&-1\end{pmatrix}}_{\text{colonne della matrice originale.}}$$

sicuramente un vettore è dipendente almeno la dim (Imm) = 2 ⇒ 2 sono indipendenti.

facendo messa di riga (le stesse di prima) ho cambiato lo span ma la dimensione NO

$$\begin{pmatrix}1&2&5&2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

I primi due vettori sono indipendenti (con pivot) i corrispondenti prima delle messe sono i vettori indipendenti che cercano.

teorema

Se $(v_1 | v_2 | \dots) \xrightarrow[\text{riga}]{\text{mosse}} (v_1' | v_2' | \dots)$

e v_1', v_2' sono una base

allora v_1 e v_2 sono una base del sistema originale.

Le mosse di riga le potevo fare a partire solo dai primi due vettori.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(le stesse)}]{\text{riga}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono indipendenti

$\Downarrow$

$\ker = 0$

non influenzano le prime due se tolgo alcune colonne

quindi anche la matrice prima ha $\ker = 0$

sono indipendenti anche i vettori della matrice da cui si parte.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono la base dell'immagine di f.

$\dim(\text{Im}) = 2$

$\dim(\text{Dominio}) = 2$ $\rightarrow 2+2 = 4 = \dim(\text{Dominio})$.

es: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+z \\ x+z \end{pmatrix}$$

matrice di L rispetto a basi non standard:

$$C = \left\{ \overset{c_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}}, \overset{c_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \overset{c_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\} \qquad B = \left\{ \underset{b_1}{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{b_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$[L]_B^C$?

Scrivo quella rispetto alle basi canoniche:

$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow$ applico L alle basi

$$\left.\begin{array}{l} L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow [L] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oppure separo i contributi:

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [L] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Per calcolare $[L]_B^C$

$$L(C_1) = L\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 2+3 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$L(C_2) = L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$L(C_3) = L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vettori ottenuti applicando la base C.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} = [L]^C_{\text{canonica}}$$

↳ noi vogliamo B. (non canonica)

Trovare le coordinate dei vettori applicando B.

Devo risolvere il sistema:

$$\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}5/3\\10/3\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&0&5\\1&1&0&5\\1&1&1&5\end{array}\right) \qquad x = \frac{5}{3}$$

$$y = 5 - \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$$

$$z = 5 - \frac{5}{3} - \frac{10}{3} = 0$$

$$\xrightarrow{R_1 \cdot \frac{1}{3}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5/3\\1&1&0&5\\1&1&1&5\end{array}\right] \longrightarrow$$

creo degli $\emptyset$ sotto i pivot. $\rightarrow$ scalini semplificati

$$\xrightarrow[R3-R1-R2]{R2-R1} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5/3\\0&1&0&10/3\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix}\bar{b}_1\end{pmatrix} + \frac{10}{3}\begin{pmatrix}\bar{b}_2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}\bar{b}_3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}5/3\\10/3\\0\end{pmatrix} \qquad [L] = \left(\begin{array}{c|c|c} L(C_1)_B & L(C_2)_B & L(C_3)_B \end{array}\right)$$

Possiamo farlo anche tutto insieme:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

risolvo il sistema $\Rightarrow$ ne risulta 3.

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{R_2-R_1} \\ R_3-R_2-R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10/3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$L(C_1)_B$ $L(C_2)_B$ $L(C_3)_B$

la matrice è proprio quella delle coordinate (perché abbiamo 0 1 0 prima).

ker(L) $\rightarrow$ vettori mandati in $\emptyset$.

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

base canonica $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

Il ker è riferito alla funzione, non cambia se utilizziamo una matrice diversa per la <u>stessa</u> funzione.

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

z libera $\Rightarrow$ ker dim $= 1$

$$\begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ base del ker $= \text{span}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

scrivo il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella base C.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x(C_1) + y(C_2) + z(C_3)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

trovati x y z

$$\xrightarrow{R_2 - \frac{3}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 5/2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - \frac{3}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 3/2 & 1 & 5/2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - 3R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} z = -5 \\ y = 5 \\ x = -3 \end{cases}$$

coordinate in base C.

ESERCITAZIONE 5/04/2017

$a_0 = 1$
$a_1 = 1$

$a_n = a_{n-2} + n \quad n \geq 2$

↳ non è a coefficienti costanti.

dimostrare che $\exists n_0 \; \forall n \geq n_0$
$(a_n \geq 2n)$

1) trovare n_0
2) dimostro la formula

1) faccio dei casi per vedere come si comporta la successione.

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8 ...
1	1	3	4	7	9	13	16	21

$n_0 = 6$ congettura (quindi da dimostrare)

tento per induzione:

$p(n) \quad a_n \geq 2n$

induzione FORTE

$p(6)$ vera

$p(n+1) \geq 2(n+1)$

$n \geq 5$?

per ipotesi induttiva prendo tutti i casi precedenti veri (da 6 a n).

$a_{n+1} \overset{?}{\geq} 2(n+1)$

$a_{n+1} = \underbrace{a_{n-1}}_{\geq} + n + 1$

per $p(n-1)$ $\quad 2(n-1) + (n+1) \overset{?}{\geq} 2(n+1)$

$2n - 2 + n + 1 \geq 2n + 2$

$3n - 1 \geq 2n + 2$

$-2 + 1 + n \geq 2 \qquad n \geq 3$

quindi sarà vera per $n \geq 6$.

vero per $n \geq 3$

se viene un valore più piccolo di quello che cerchiamo va bene

cerco una formula chiusa

- Notiamo che la successione è definita da due casi:
  - Numeri pari;
  - Numeri dispari

congettura:

se $\underbrace{n \text{ dispari}}_{2k-1}$ $a_n =$ è un quadrato

es. 7 $a_7 = 16 = 4^2$ $7 = 2 \cdot 4 - 1$

$$a_2 = k^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

dimostro per induzione: su k

$$a_{2k-1} = k^2$$

$P(k)$

$P(1) = a_{2 \cdot 1 - 1} = 1^2$

$a_1 = 1$ vera

assumo i precedenti veri e mostro un vero

$P(k+1)$

$$a_{2(k+1)-1} \overset{?}{=} k^2$$

$$\| $$

$$a_{2k+2-1}$$

$$\| $$

$$a_{2k+1}$$

$$a_{2k+1} = a_{2k-1} + 2k+1$$

per la formula iniziale.

$$\| \; P(k)$$

$$k^2 + 2k + 1$$

$$\|$$

$$(k+1)^2$$

$P(k+1)$

torna

congettura n pari

$$1 + \sum \text{numeri pari}$$

$$a_{2k} = 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + \dots + 2 \cdot k = 1 + 2\left(\underbrace{0 + 1 + \dots + k}_{\text{somma dei primi } k \text{ numeri}}\right)$$

$$a_{2k} = 1 + \cancel{2}\,\frac{k(k+1)}{\cancel{2}}$$

$$a_{2k} = 1 + k(k+1)$$

$P(0)$ vera

$P(k+1)$

$$a_{2(k+1)} \overset{?}{=} 1 + (k+1)(k+2) = 1 + k^2 + 2k + k + 2$$

$$\| $$

$$a_{2k+2} \underset{\text{per definizione}}{=} \underbrace{a_{2k}}_{\text{per ipotesi induttiva}} + (2k+2)$$

$$= \underline{1 + k(k+1)} + 2k + 2 =$$

$$= k^2 + 3k + 3 =$$

$=$

<u>vero tutto</u> ✓

es: $a \mid b$ e $k \mid a \Rightarrow \frac{a}{k} \mid \frac{b}{k}$? $\boxed{\text{SI}}$

$a \mid b \Rightarrow \exists\, \ell.\ b = a \cdot \ell \qquad \ell \in \mathbb{Z}$

$k \mid a \Rightarrow \exists\, z.\ kz = a$

$$\Downarrow\ b = kz\ell$$

$$\frac{a}{k} = z \qquad \frac{b}{k} = \frac{a \cdot \ell}{k} = z \cdot \ell$$

$$\Rightarrow \underbrace{z}_{\frac{a}{k}} \mid \underbrace{z\ell}_{\frac{b}{k}} \quad \underline{\underline{\text{si}}}$$

ripasso Bezout:

se ho $a, b \in \mathbb{Z}$ e $(a,b) = mcd(a,b)$
$\neq 0$

$(a,b) = ax + by$. possiamo ottenere mcd con una combinazione lineare.

es:

$1 = 5x + 7y$
$2 = 10x + 14y$

se a, n, b dati. Quando $\exists x y$.

$n = ax + by$. ?

[posso mettere un multiplo di mcd al posto n] Risolubile quando $mcd(a,b) \mid n$
Posso moltiplicare n per un multiplo dell' mcd.

- Se $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$?

no in generale.
Devono esserci delle condizioni in più:

$(a,b) = 1 \Rightarrow a \mid c$.

Per Bezout $\exists x y$. $ax + by = 1$

$acx + bcy = c$

$a \mid acx$, $a \mid bcy \Rightarrow a \mid c$
per ipotesi

Teorema:

$a \mid c \wedge b \mid c \Rightarrow ab \mid c$?

Solo se a e b non hanno fattori comuni.
Quindi NO $\Rightarrow$ proviamo un controesempio.

teorema: $a|c \wedge b|c \wedge (a,b)=1 \Rightarrow ab|c$ vero.

[dimostrazione]

Prima es.

ho $a, b \in \mathbb{Z}$, $d=(a,b)$

divido per d $\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \Rightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)=1$

per assurdo diciamo che $\exists k$ t.c.

$$k \mid \frac{a}{d} \quad e \quad k \mid \frac{b}{k}$$

$\Downarrow$ moltiplico per d.

$$k \cdot d \mid a \quad e \quad dk \mid b$$

assurdo perché d era già il più grande divisore $\Rightarrow$ $\underline{k=1}$

dim:

$ak=c$

e $b|c \Rightarrow b|ak \Rightarrow b|k$

k lo posso scrivere come $k=b \cdot l$

quindi $c=ak=abl$

$$ab|c.$$

teorema: $a|c \wedge b|c \Rightarrow \frac{a \cdot b}{d} | c$

con $d=(a,b)$

es: $6|30 \quad 10|30 \not\Rightarrow 6 \cdot 10|30$ infatti non lo divide

ma $\Rightarrow \frac{6 \cdot 10}{2} | 30$ vero.

$mcd(a,b)$

dimostrazione:

$$\frac{a}{d} \mid \frac{c}{d} \quad , \quad \frac{b}{d} \mid \frac{c}{d}$$

primi tra loro $\quad \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$

per il teorema precedente

$$\frac{a \cdot b}{d \cdot d} \mid \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \cdot b}{d} \mid c$$

corollario:

i multipli comuni di a e b sono uguali ai multipli di $\frac{a \cdot b}{d}$ $\quad d \to \mathrm{mcd}(a,b)$

Quindi: $\quad \mathrm{mcm}(a,b) = \frac{a \cdot b}{(a,b)}$

$\Downarrow$

il più piccolo dei multipli.

$$\begin{cases} x \equiv 0 \ (a) \\ x \equiv 0 \ (b) \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$x \equiv 0 \ (\mathrm{mcm}(a,b))$$

se $(a,b) = 1$
$\Rightarrow \mathrm{mcm}(a,b) = a \cdot b$.

es:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \ (10) \\ x \equiv 3 \ (15) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3 \equiv 0 \ (10) \\ x - 3 \equiv 0 \ (15) \end{cases}$$

$$x - 3 \equiv 0 \ (30)$$

$$(10, 15) = 5$$

$$[10, 15] = \frac{10 \cdot 15}{5} = 30$$

es:

$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \quad . \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

$f_n \equiv ? \ (3)$

0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
≡	≡	≡	≡	≡	≡	≡	≡	≡	≡	≡
0	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1

89
≡
2

è periodicità.

$f_{n+8} \equiv f_n$ congettura

↓ dopo 8 numeri si ripete la periodicità

8 casi base.

$f_0 \equiv 0 \qquad f_2 \equiv 1 \qquad \infty \qquad f_7 \equiv 1$

$f_1 \equiv 1 \qquad f_3 \equiv 2$

$f_{n+8} \equiv f_n$ congettura $P(n)$

f_{100} → tolgo i multipli di 8

$100 \equiv 4 \ (8) \qquad f_{100} \equiv f_4 \equiv 0$

devo però <u>dimostrare</u> la congettura.

$f_{n+8} = f_{n+7} + f_{n+6}$ <u>per formula</u>

$\downarrow P(n-1)$

$\equiv \qquad \equiv$

$f_{n-1} + f_{n-2} \overset{def}{=} f_n$ ← è esattamente fibonacci.

es: $M_2(\mathbb{R})$ = matrici 2x2 a coefficienti in $\mathbb{R}$

spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Somma di due matrici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$r \in \mathbb{R}$ $$r\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}$$

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$

base: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{e_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{e_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{e_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{e_4}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vedo se è generabile dalle basi scelte

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono indipendenti sì

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad f: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$

$$f(A) = A \cdot B = A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

f prende come input una matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e restituisce

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

dimostrare che è lineare

$f(A+A') = f(A) + f(A')$? verifico

$(A + A')B = AB + A'B$ ✓

- $f(rA) = r f(A)$

$\quad\quad\quad

$$\underset{4\times 4}{[f]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

coordinate di fE_3

coordinate di fE_4

coordinate di fE_1

coordinate di fE_2

coordinate messe in colonna.

riduco a scalini per trovare Ker e Imm.

$$\xrightarrow[R4-2R3]{R2-2R1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 variabili libere $\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} f) = 2$

$\rightarrow \dim(\operatorname{Imm} f) = 2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = xE_1 + yE_2 + zE_3 + tE_4 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

perché stiamo ragionando con matrici.

t e y sono libere:

$$\begin{pmatrix} -2y \\ y \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{contributi}]{\text{separo i}} \begin{pmatrix} -2y & y \\ -2t & t \end{pmatrix}$$

scritta in matrice

sono matrici contenute nel Ker.

Se moltiplico 5e per 3 ottengo la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$y\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\in \text{span}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

basi del $\ker(f)$

Immagine $\Rightarrow$ dim $= 2$

= span dei vettori le cui coordinate sono le colonne.

$$\Rightarrow \text{span}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

sono questi vettori, quelli che erano scritti in colonna sono le coordinate.

la base dell'Imm =

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

dopo aver trovato le basi devo vedere se sono indipendenti.

comunque dopo aver fatto mosse di riga sulla matrice, l'indipendenza dei vettori si preserva. Quando avevo la matrice a scalini guardo dove erano i pivot e guardavo (nella matrice originale) a quali coordinati si riferivano. La posizione in cui si trovano i pivot è la posizione delle coordinate dei vettori indipendenti.

es: $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad L(x,y) = (x,y)$

$\overset{\shortparallel}{id}$

$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrice identità $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$B = \left\{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

$[id]^{B}_{canonica}$ $\quad$ 1) dove va $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

" " $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nella base B

devo calcolare $id(v_1) = v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

lo devo riscrivere rispetto alla base standard

$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella base B.

$\Rightarrow id(v_2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$[id]^{B}_{canonica} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ v_1 \quad v_2 \end{array}$$

Se cambiamo

$[id]^{B}_{can}$ e $[id]^{can}_{C}$ $\Rightarrow$

cambio $[L]^{B}_{C}$

$id \circ id = id$

$\downarrow$

composto

$$[id]^{can}_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [id]^{B}_{can} \cdot [id]^{can}_{B}$$

sono una l'inversa dell'altra

es:

$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare

$L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad L\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \dim(\ker L)$?

abbiamo solo due valori

Prima posso calcolare l'immagine

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Imm}(L)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Imm}(L) \subseteq \mathrm{span}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2$$

l'immagine di L è tutto $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ la sua dimensione è $= 2$

$\Rightarrow \dim(\ker L) = 1$.

es:

$$V = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x]^{\leq 3} \mid p(1) = 0 \}$$

$$= \{ a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a + b + c + d = 0 \}$$

b, c, d liberi

$$a = -b - c - d$$

$$V = \{ (-b - c - d) + bx + cx^2 + dx^3 \mid b, b, c \}$$

base di V?

isolo i contributi:

$\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ base $1, x, x^2, x^3$

ma voglio la base di V.

$p(1) = 0$ è la stessa cosa che dire

$\Downarrow$ $(x-1) \mid p(x)$ teorema di RUFFINI

$p(x) = (x-1)\, q(x)$

massimo grado 3 — grado 1 — $\Rightarrow$ grado 2

$p(x)$ è un polinomio del tipo

$$(x-1)a + (x-1)xb + (x-1)x^2c.$$

isolo i contributi di a, b, c

span $\{(x-1), (x-1)x, (x-1)x^2\}$ base

TEORIA:

Tutte le soluzioni di un sistema non omogeneo

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ x + 5y = 2 \end{cases}$$

differiscono per una soluzione del sistema omogeneo associato.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

trovo una soluzione

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -11 & - \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} y_0 = \frac{5}{11} \\ x_0 = -\frac{3}{11} \end{cases}$$

unica soluzione.

$A =$ matrice 2×3 $\qquad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

n° equazioni $\quad$ n° incognite.

trovo due soluzioni

$$A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tutte le soluzioni le ottengo come combinazione lineare tra una qualunque soluzione del sistema omogeneo (associato) e una soluzione del sistema non omogeneo.

es: $\underbrace{\text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\subseteq \mathbb{R}^3} \cap \underbrace{\text{span}\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\subseteq \mathbb{R}} = ?$

piano in $\mathbb{R}^3$ $\qquad$ piano in $\mathbb{R}^3$

- o sono uguali
- o si intersecano in una retta.

2 metodi:

- trasformo in Ker e interseco
- oppure:

prendo un v e all'intersezione $\exists a, b, c, d$.

$$v = \underbrace{a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{perché appartiene al primo span}} = \underbrace{c\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{perché appartiene al secondo span.}}$$

come scelgo a, b, c, d, così da ottenere l'uguaglianza

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-2\\-9\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}-6\\-9\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2c+6d=0 \\ 2a+5b+9c+9d=0 \\ -d=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 \\ 2 & 5 & -9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R2-2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

semplifico per ottenere pivot = 1 e ciò che è sopra il pivo lo porto = 0.

$$\xrightarrow[R3\cdot(-1)]{R2\cdot\frac{1}{5}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a & b & c & d \end{array} \end{array}$$

$d = 0$

$c =$ libera

$b = c$

$a = 2c$

a, b, c, d devono essere

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c\\c\\c\\0\end{pmatrix}$$

sostituisco in v i valori trovati

$$v = 2c\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}2\\9\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}6\\9\\1\end{pmatrix} \in \text{span}\begin{pmatrix}2\\9\\0\end{pmatrix}$$