Analisi Numerica a.a. 2001-2002
Primo appello

18 Gennaio 2002

Esercizio 1. Dimostrare che la funzione $f(x) = x \log x - 1$ si annulla in un solo punto $\alpha > 0$. Per approssimare il valore di α si considerino successioni generate a partire da un valore iniziale x_0 dalla relazione $x_{i+1} = g(x_i)$. Si analizzi la convergenza locale e si confronti la velocità di convergenza delle successioni ottenute rispettivamente con le tre funzioni seguenti: $g(x) = 1/\log x$, $g(x) = e^{1/x}$, $g(x) = (x+1)/(\log x + 1)$.

Esercizio 2. Dire, dando le opportune motivazioni o fornendo un controesempio, se la forma normale di Schur di una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è unica. Portare in forma normale di Schur la matrice $A = I + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^H$, dove $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ e I denota la matrice identica di ordine n.

Esercizio 3. Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$ definita da $a_{i,i} = i\alpha$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,i+1} = -a_{i+1,i} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,j} = 0$, altrimenti, dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Cioè

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & & \bigcirc \\ -1 & 2\alpha & 1 & & & \\ & -1 & 3\alpha & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ \bigcirc & & & & -1 & n\alpha \end{bmatrix}.$$

Determinare i valori di α per cui i cerchi di Gerschgorin di A sono a due a due disgiunti. Si dimostri che per tali valori di α la matrice A ha n autovalori reali e distinti.

Posto $\alpha = 4$ si calcolino cerchi di inclusione più accurati possibile per ciascun autovalore di A applicando i teoremi di Gerschgorin alla matrice DAD^{-1} dove D è una matrice diagonale non singolare opportunamente scelta.

(Facoltativo). Stimare nel modo più accurato possibile il valore β per cui la matrice A ha autovalori reali per ogni α tale che $|\alpha| \geq \beta$.

Esercizio 4. Si scriva una subroutine in Fortran 90 che, dato un intero n, una matrice $n \times n$ triangolare superiore A e un vettore $\boldsymbol{b}$ di n componenti, calcoli la soluzione $\boldsymbol{x}$ del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.