Analisi Numerica a.a. 2001-2002

Secondo appello, 14 Febbraio 2002

Esercizio 1. Sia $m \geq 2$ un numero intero e a un numero reale tale che $1 < a < 2$.
a) Per approssimare la radice m-esima di a si consideri la successione generata a partire dal valore iniziale $x_0 = 1$ dalla relazione $x_{i+1} = g(x_i)$ dove

$$g(x) = x - \frac{1}{ma}(x^m - a).$$

Si dimostri che $\{x_i\}$ converge in modo monotono a $\sqrt[m]{a}$ con convergenza lineare.
b) Si consideri poi la successione generata a partire da $y_0 = 1$ da $g(y_{i+1}) = g(y_i)$ con

$$g(y) = y - \frac{1}{ma}(y^m - a)y.$$

Si dimostri che la successione $\{y_i\}$ converge in modo monotono a $\sqrt[m]{a}$ e si analizzi la velocità di convergenza.
c) Con $a = 3/2$ e $m = 3$ si ottengono i seguenti valori per le due successioni (in grassetto si riportano le cifre corrette)

$x_1 = \mathbf{1.1}111111111111111111$ $y_1 = \mathbf{1.1}111111111111111111$
$x_2 = \mathbf{1.1}396128638926992836$ $y_2 = \mathbf{1.14}27797253128757473$
$x_3 = \mathbf{1.144}0494980577738485$ $y_3 = \mathbf{1.1447}077114168861724$
$x_4 = \mathbf{1.144}6298687068548427$ $y_4 = \mathbf{1.144714242}4788057032$
$x_5 = \mathbf{1.1447}035706182327478$ $y_5 = \mathbf{1.1447142425533318678}$
$x_6 = \mathbf{1.14471}28933253420544$ $y_6 = \mathbf{1.1447142425533318678}$

Si commenti il comportamento di tali valori alla luce dell'analisi teorica svolta.

Esercizio 2. Sia $n > 2$ un numero intero e si denoti con $\boldsymbol{e} = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ il vettore con tutte componenti uguali a 1.
a) Si costruisca una matrice di Householder P tale che $P\boldsymbol{e} = \theta \boldsymbol{e}_1$, dove $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$ è il primo versore della base canonica e $\theta \in \mathbb{R}$.
b) Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$ definita da $a_{i,1} = a_{1,i} = 1$ per $i = 2, \ldots, n$, $a_{i,j} = 0$ altrimenti. Cioè:

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \hline 1 & & & \\ \vdots & & \bigcirc & \\ 1 & & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \boldsymbol{e}^T \\ \hline \boldsymbol{e} & \bigcirc \end{array}\right], \quad \bigcirc \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

Si costruisca una matrice ortogonale Q di elementi reali tale che $B = QAQ^T = (b_{i,j})$ abbia tutti elementi nulli escluso $b_{2,1} = b_{1,2}$ e si valuti il valore di $b_{1,2}$.
c) Si diano condizioni sul parametro α affinche il metodo di Jacobi applicato al sistema $(I - \alpha A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sia convergente.
d) (Facoltativo) Si diano condizioni sul parametro α affinche il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $(I - \alpha A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sia convergente. Si confrontino le velocità di convergenza dei due metodi.

Esercizio 3. Si scriva una subroutine in Fortran 90 che, dato un intero n, un numero reale x e un vettore $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ calcola $y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ con il metodo di Ruffini-Horner.