Analisi Numerica a.a. 2001-2002

Terzo appello, 22 Marzo 2002

Esercizio 1. Sia A una matrice $n \times n$ reale, simmetrica e definita positiva. Siano λ_j, $j = 1, \dots, n$ i suoi autovalori ordinati in modo che $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n$. Per risolvere il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ si consideri il metodo iterativo definito, a partire da un vettore iniziale $\boldsymbol{x}^{(0)}$ da

$$\boldsymbol{x}^{(i+1)} = \boldsymbol{x}^{(i)} + \alpha(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^{(i)}),$$

dove α è un parametro reale.

a) Si diano condizioni necessarie e sufficienti su α, in funzione degli autovalori di A, affinché il metodo sia convergente per ogni scelta del vettore $\boldsymbol{x}^{(0)}$.

b) Si determini il valore di α, in funzione degli autovalori di A, in modo che la convergenza sia "più rapida possibile".

c) Si dia una condizione sufficiente su α, in funzione degli elementi di A, affinché il metodo sia convergente per ogni scelta del vettore $\boldsymbol{x}^{(0)}$.

d) (Facoltativo) Per una matrice $n \times n$ arbitraria A ad elementi reali, sotto quali condizioni sugli autovalori di A esiste un α reale per cui il metodo è convergente?

Esercizio 2. Siano $x_1, \dots, x_{2n}$ numeri reali positivi a due a due distinti e siano a, b due numeri positivi tali che $a < x_i < b$, $i = 1, \dots, n$. Si definiscano le matrici $2n \times 2n$, $W = (w_{i,j})$ e $V = (v_{i,j})$ tali che $w_{i,j} = x_i^{j-n}$, $v_{i,j} = x_i^{j-1}$, $i, j = 1, \dots, 2n$.

a) Mettendo in relazione $\det V$ con $\det W$ e sfruttando le proprietà delle matrici di Vandermonde si dimostri che W è non singolare.

b) Assegnati i numeri reali $y_1, \dots, y_{2n}$ dire se il problema di determinare i coefficienti α_i, $i = -n + 1, \dots, n$ tali che la funzione $s(x) = \sum_{j=-n+1}^{n} \alpha_j x^j$ soddisfi le condizioni di interpolazione $s(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, 2n$, ha soluzione e, nel caso, dire se è unica.

c) Se $x_1, \dots, x_{2n}$ coincidono con le radici $2n$-esime dell'unità, individuare un metodo per il calcolo degli α_i che impieghi $O(n \log n)$ operazioni aritmetiche, dove n è potenza intera di 2.

d) (Facoltativo) Se gli y_i del punto b) sono i valori che una funzione $f(x) \in C^{2n}[a, b]$ assume nei punti x_i, cioè $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, 2n$, dare una espressione esplicita per l'errore di interpolazione $r(x) = f(x) - s(x)$ per $x \in [a, b]$.

Esercizio 3. Si scriva una subroutine in Fortran 90 che, dato un intero n, e tre vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ calcola il prodotto $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, dove $A = I - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$ è una matrice elementare.