Analisi Numerica a.a. 2001-2002

Quinto appello

Esercizio 1. Siano $n > 2$ un numero intero e α un numero reale non nullo. Si consideri la matrice $A = (a_{i,j})$, $n \times n$, tale che $a_{i,i} = 1$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i+1,i} = \alpha$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{1,n} = \alpha$, $a_{i,j} = 0$ altrove, cioè

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \alpha \\ \alpha & 1 & \bigcirc & \\ & \ddots & \ddots & \\ \bigcirc & & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

a) Si dimostri che esistono le fattorizzazioni LU di A e di A^T.

b) Si descriva un algoritmo per il calcolo del fattore U nella fattorizzzione LU di A e se ne valuti il costo computazionale.

c) Si descriva un algoritmo per il calcolo del fattore U nella fattorizzzione LU di A^T e se ne valuti il costo computazionale.

d) Si dimostri che se $|\alpha| < 1$, nella fattorizzazione LU di A e di A^T non è necessario applicare strategie del massimo pivot.

Esercizio 2. Si dimostri che per $x > 0$ la funzione $f(x) = x - 2\sin x$ si annulla in un solo punto α, dove $\frac{\pi}{4} < \alpha < \pi$. Si studi la convergenza ad α delle successioni definite da $x_{i+1} = g(x_i)$, $w_{i+1} = h(w_i)$, dove $g(x) = 2\sin x$, $h(x) = x - (x - 2\sin x)/3$. In particolare si dimostri che, per $w_0 = \pi/2$ la successione $\{w_i\}_i$ converge in modo monotono ad α. Cosa succede per $w_0 = \pi$? Cosa succede se w_0 è arbitrario?

Esercizio 3. Si scriva una subroutine in Fortran 90 che, dato un intero n, il numero reale α ed un vettore $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, calcola il prodotto $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, dove A è la matrice dell'esercizio 1.