**Esame di Analisi Numerica, a.a. 2002-2003**
**Primo Appello, 21 Gennaio 2003**

**Esercizio 1.** Fra i metodi di iterazione funzionale del tipo $x_{i+1} = g(x_i)$ con $g(x) = \alpha + \beta x + \gamma/x$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, si determini quello che permette di approssimare $\sqrt{2}$ col massimo ordine di convergenza; se ne valuti l'ordine di convergenza e il costo computazionale per passo. Si svolga la stessa analisi nella classe di funzioni del tipo $g(x) = \alpha + \beta x + \gamma/x + \delta x^3$ con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$. Si dica, motivandone la risposta, quale dei due metodi iterativi ottenuti è computazionalmente più efficiente.
*Facoltativo:* Dire se esistono metodi iterativi a convergenza quadratica per il calcolo di $\sqrt{2}$ che non richiedono divisioni.

**Esercizio 2.** Siano rispettivamente $J$ e $G$ le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel per la risoluzione del sistema lineare $H\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dove $H$ è la matrice tridiagonale $n \times n$

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 3 & 1 \\ & & & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si dimostri che per ogni $n \geq 2$ è $\rho(J) < 2/3$ e $\rho(G) < 4/9$, dove $\rho$ denota il raggio spettrale.

Si supponga $n$ pari e si partizioni $H$ in blocchi $2 \times 2$ così che risulta

$$H = \begin{bmatrix} A & B & & & \\ B^T & A & B & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & B^T & A & B \\ & & & B & A \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si consideri il metodo iterativo dato dal partizionamento $H = M - N$, dove $M$ è la matrice diagonale a blocchi $2 \times 2$ con blocchi diagonali uguali ad $A$ (metodo di Jacobi a blocchi) e si dimostri che il raggio spettrale della matrice di iterazione $M^{-1}N$ è minore di $1/2$ per ogni $n \geq 4$.
*Facoltativo:* Sia $\tilde{H}$ la matrice ottenuta da $H$ ponendo uguale ad 1 l'elemento in posizione (1,1). Dire se il metodo di Jacobi applicato al sistema $\tilde{H}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è convergente e si dia una limitazione superiore al raggio spettrale della matrice di iterazione.

**Esercizio 3.** Si scriva una function in Fortran 90 che, dati in ingresso due interi $k$ ed $n$ ed un vettore $v$ di $n$ componenti di tipo real, calcola e fornisce in output la norma $k$ di $v$ se $k \in \{1, 2\}$ e la norma infinito altrimenti.