Esame di Analisi Numerica
secondo appello, 13 Febbraio 2003

Esercizio 1. Si consideri la successione $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ generata a partire da $x_0 \in \mathbb{R}$ dalla relazione $x_{i+1} = g(x_i)$ dove

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2}{2x} & \text{se } x \geq \sqrt{2} \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{1}{4}x^2 & \text{se } x < \sqrt{2} \end{cases} \tag{1}$$

Si dica per quali valori di x_0 la successione generata è convergente e se ne determini il limite. Si determini inoltre l'ordine di convergenza e si dica per quali valori di x_0 la convergenza è monotona.
Facoltativo: Dire, motivando la risposta, se è possibile definire l'ordine di convergenza per le successioni ottenute con la funzione $g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^3$ per $x^2 - 2 > 0$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ per $x^2 - 2 \leq 0$.

Esercizio 2. Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$, $n \geq 3$, tale che $a_{1,1} = 1$, $a_{i,i} = 2$, per $i = 2, \dots, n$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,1} = -1$ per $i = 1, \dots, n-1$, $a_{1,n} = a_{n,1} = 1$, $a_{i,j} = 0$ altrimenti. In particolare, per $n = 4$ è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Si verifichi che valgono le condizioni sufficienti di esistenza e unicità della fattorizzazione LU
b) Si scriva la matrice elementare di Gauss E_1 che trasforma la prima colonna di A nel vettore $(1, 0, \dots, 0)^T$ e si calcoli $A_1 = E_1 A$.
c) Si costruiscano la matrice L e la matrice U della fattorizzazione LU di A.
d) Facoltativo: Si dia una maggiorazione al numero di condizionamento di A in norma infinito.

Esercizio 3. Si scriva una subroutine o una function in fortran 90 che dato in input un numero reale x fornisce in output il valore $g(x)$, dove g è la funzione (1).