Esame di Analisi Numerica, terzo appello, 3/6/2003

Esercizio 1. Sia $p(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i$ un polinomio assegnato. Si vuole approssimare uno zero ξ di $p(t)$ e i coefficienti $x_0, \ldots, x_{n-2}$ del fattore $q(t) = t^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} x_i t^i$ tale che

$$p(t) = q(t)(t - \xi). \qquad (1)$$

Per fare questo si svolgano i seguenti passi

- Si scriva il sistema formato dalle n equazioni non lineari nelle incognite $x_0, \ldots, x_{n-2}$ e ξ ottenuto uguagliando i coefficienti dei due polinomi in entrambi i membri della (1).
- Si scriva l'iterazione di Newton-Raphson applicata al sistema precedente, descrivendo esplicitamente la matrice Jacobiana J del sistema.
- Si dimostri che J è singolare se e solo se $q(\xi) = 0$ e si dimostri che se ξ è uno zero di $p(t)$ di molteplicità 1 il metodo di Newton-Raphson ha convergenza locale di ordine almeno 2.
- Si determini un metodo di costo $O(n)$ per risolvere il sistema con matrice J.

Esercizio 2. Si dica, motivando la risposta, quali delle seguenti funzioni è una norma vettoriale su $\mathbb{R}^n$ per $n > 2$:

- $|x_1| + |x_n|$
- $\max |x_i| + \min |x_i|$
- $|x_1| + \max |x_i|$

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e si dica motivandone la risposta se può esistere una norma indotta tale che

- $||A|| = 4$
- $||A|| = 2 + 10^{-20}$
- $||A|| = 2$

Esercizio 3. Si scriva una subroutine in fortran 90 che data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ calcola il prodotto $B = A^T A$ senza utilizzare il comando "matmul".