Esame di analisi numerica quarto appello
1/7/03

Esercizio 1: Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$ tale che $a_{i,i} = 1$ per $i = 1, \ldots, n$, $a_{1,i} = a_{i,1} = \alpha$ per $i = 2, \ldots, n$ e $a_{i,j} = 0$ altrimenti, dove $\alpha \neq 0$. Siano inoltre J e G rispettivamente le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel applicati al sistema $Ax = b$.

1. Si determinino gli elementi di J e di G e si dimostri che J ha rango 2 mentre G ha rango 1.

2. Si determini il raggio spettrale di J e di G e si diano condizioni necessarie e sufficienti affinché i metodi di Jacobi e di Gauss Seidel siano convergenti. Si confrontino inoltre le velocità di convergenza dei due metodi.

3. Si determini una matrice di Householder P tale che $B = PAP^T$ sia del tipo
$$\begin{bmatrix} 1 & \theta & & & \bigcirc \\ \theta & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ \bigcirc & & & & 1 \end{bmatrix}$$
e si confronti il raggio spettrale delle matrici di iterazione del metodo di Jacobi e di Gauss Seidel relativi a B con quelli relativi ad A.

Esercizio 2: Sia n un intero positivo e $d_1 < d_2 < \ldots < d_n$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ numeri reali. Si consideri la funzione
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x - d_j).$$

1. Si verifichi che $f(d_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. Si dimostri che $f(x)$ ha $n-1$ zeri reali $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ tali che $d_i < \xi_i < d_{i+1}$ per $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

3. Sfruttando il fatto che $\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(x - d_j) = (\prod_{j=1}^{n}(x - d_j))/(x - d_i)$, si costruisca un algoritmo per il calcolo del valore di $f(x)$ in un punto $x \neq d_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, in $O(n)$ operazioni aritmetiche.

4. Si descriva un metodo che dato un intero k, $1 \leq k \leq n-1$, ed un numero reale $\epsilon > 0$, calcoli una approssimazione $\hat{\xi}_k$ di ξ_k tale che $|\hat{\xi}_k - \xi_k| < \epsilon$.

Esercizio 3: Si scriva una subroutine in fortran 90 che dati un intero $n > 0$ due vettori reali $d = (d_1, \ldots, d_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ed un numero reale x calcola $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2/(x - d_i)$.