Esame di Analisi Numerica
quinto appello, 29/9/03

Esercizio 1. Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

$$\begin{aligned} g(x,y) &= (g_1(x,y), g_2(x,y)), \\ g_1(x,y) &= \alpha(x^2+3y^2-8)+y, \\ g_2(x,y) &= \alpha(2x^2-y^2-2)+x \end{aligned}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si dimostri che $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ è punto fisso di $g(x,y)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di α per cui esiste un intorno $\mathcal{U}$ di P tale che la successione (x_i, y_i) definita da $(x_{i+1}, y_{i+1}) = g(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots$, converga a P per ogni $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Si determinino i valori di α per cui la convergenza è asintoticamente più rapida, motivandone le ragioni.

Esercizio 2. Si consideri il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dove $A = (a_{i,j})$ è la matrice $n \times n$ definita da $a_{i,i} = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i+1,i} = \beta_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,n} = \gamma_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,j} = 0$, altrimenti. Ad esempio, per $n = 4$ la matrice A è data da

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 & \gamma_2 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Dire sotto quali condizioni esistono uniche le fattorizzazioni LU di A e di A^T e si determinino i fattori L ed U in entrambi i casi. Si utilizzino tali fattorizzazioni per la risoluzione del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ descrivendo espicitamente i metodi di risoluzione. Si confrontino i metodi così ottenuti in base al loro costo computazionale.

Esercizio 3. Si scriva una subroutine che dati in input il numero intero $n > 0$ e i vettori $\boldsymbol{a} = (a_i), \boldsymbol{b} = (b_i), \boldsymbol{c} = (c_i) \in \mathbb{R}^n$ calcola e fornisce in output il vettore $\boldsymbol{x}$ soluzione del sistema lineare $H\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ dove $H = (h_{i,j})$ ha elementi $h_{i,i} = a_i$, $i = 1, \ldots, n$, $h_{i+1,i} = b_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $h_{n,1} = b_n$, $h_{i,j} = 0$ altrimenti.