Esame di Analisi Numerica
a.a. 2003-2004, Appello 1, 26-1-2004

Esercizio 1. Sia $\mathrm{Exp}(x) : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ una funzione definita sull'insieme $\mathcal{F}$ dei numeri *floating point* con precisione u tale che $\mathrm{Exp}(x) = e^x(1+\epsilon)$ con $|\epsilon| < u$. Per calcolare la funzione $f(x,y) = e^{x+y}$, per $x, y \in \mathcal{F}$, si considerino i seguenti due algoritmi: Algoritmo 1: $s_1 = x + y$, $s_2 = \mathrm{Exp}(s_1)$; Algoritmo 2: $t_1 = \mathrm{Exp}(x)$, $t_2 = \mathrm{Exp}(y)$, $t_3 = t_1 * t_2$.
a) Si diano maggiorazioni al modulo dell'errore relativo totale nei due casi (nell'ipotesi $x, y \in \mathcal{F}$, in assenza di overflow/underflow).
b) Si determini l'insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ delle coppie (x,y) per le quali la maggiorazione dell'errore del primo algoritmo sia minore o uguale alla maggiorazione dell'errore del secondo algoritmo.
c) (Facoltativo) Può E essere la palla unitaria rispetto a una norma su $\mathbb{R}^2$?

Esercizio 2. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$, e sia $g(x) \in C^1[a,b]$ tale che $g(\alpha) = \alpha$ con $\alpha \in [a,b]$. L'unica informazione aggiuntiva disponibile è che $1/3 \leq g'(x) \leq 1/2$ per ogni $x \in [a,b]$.
a) Si dimostri che per ogni $x_0 \in [a,b]$ la successione $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ definita da $x_{i+1} = g(x_i)$ converge ad α in modo monotono e si determini un intero k tale che $|x_k - \alpha| \leq (b-a)10^{-6}$, $\forall x_0 \in [a,b]$.
b) Per "accelerare" la convergenza della successione $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ si consideri la successione $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ così costruita $y_{i+1} = y_i + \theta(g(y_i) - y_i)$, dove $y_0 \in [a,b]$. Si determinino i valori di θ per cui la successione $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è convergente e si analizzi la velocità di convergenza.
c) (Facoltativo) È possibile determinare un valore ottimo di θ per cui ogni $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ha convergenza più rapida di ogni $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$? Esiste un $h < k$ tale che $|y_h - \alpha| \leq (b-a)10^{-6}$ $\forall y_0 \in [a,b]$?

Esercizio 3. Per $n \geq 5$ si consideri il sistema di equazioni lineari dove $a_1, a_n \neq 0$:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & d_1 \\ c_1 & a_2 & b_2 & O & \vdots \\ & c_2 & \ddots & \ddots & d_{n-2} \\ & O & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}. \quad (1)$$

a) Si descriva la matrice e il vettore dei termini noti del sistema ottenuto dopo il primo passo di eliminazione gaussiana applicato ad (1) e si valuti il costo computazionale per il loro calcolo. Assumendo che tutti gli elementi pivot siano non nulli, si valuti il costo computazionale della risoluzione del sistema (1) mediante eliminazione gaussiana.
b) Si consideri il sistema ottenuto da (1) scambiando l'ordine delle equazioni e delle incognite con la permutazione $\sigma_i = n - i + 1$, $i = 1, \ldots, n$ e si risponda alle domande del punto a) relativamente al sistema così ottenuto. Si confrontino i costi computazionali.
c) (Facoltativo) Con $\boldsymbol{a} = (3, 3, \ldots, 3, 1)$, $\boldsymbol{c} = (-1, -1, \ldots, -1)$, $\boldsymbol{b} = (-1, -1, \ldots, -1, -2)$, $\boldsymbol{d} = (-1, -1, \ldots, -1)$, $\boldsymbol{f} = (n-1, n-2, \ldots, 1, -1)$, si dimostri che l'eliminazione gaussiana può essere portata a termine sia per (1) che per il sistema del punto b) e si valutino e confrontino i costi computazionali in questo caso.

Esercizio 4. Scrivere una *subroutine* in Fortran 90 che, dati in input un intero n, e il vettore reale $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, fornisce in output il vettore $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ che risolve il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dove $A = (a_{i,j})$ è tale che $a_{i,i} = 2$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i+1,i} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$ e $a_{i,j} = 0$ altrove.