Compito di Analisi Numerica
a.a. 2003-2004, secondo appello, 16/2/2004

Esercizio 1. Siano $f(x), g(x), h(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue, con la derivata prima continua, tali che $h(x) = f(g(x))$, e si denotino rispettivamente con $C_f(x), C_g(x), C_h(x)$ i loro coefficienti di amplificazione relativi al punto x.

a) Si dimostri che $C_h(x) = C_f(g(x))C_g(x)$.

b) Si assuma di disporre di algoritmi $F(x)$ e $G(x)$ che calcolano $f(x)$ e $g(x)$ con errore relativo di modulo al più $u < 1$, cioè tali che $F(x) = f(x)(1 + \epsilon)$, $G(x) = g(x)(1+\delta)$, $|\epsilon|, |\delta| \leq u$, per ogni numero di macchina x. Si valuti l'errore algoritmico nel calcolo di $h(x)$ mediante l'algoritmo dato da $H(x) = F(G(x))$.

c) Se $|C_f(g(x))| \neq |C_g(x)|$ dire quale delle due situazioni $|C_f(g(x))| > |C_g(x)|$ e $|C_f(g(x))| < |C_g(x)|$ è più favorevole ai fini del contenimento dell'errore algoritmico nel calcolo di $h(x)$.

Esercizio 2. Sia A la matrice $n \times n$ con elementi $a_{i+1,i} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,n} = \alpha$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,j} = 0$ altrimenti.

i) Determinare condizioni sufficienti su α affinché gli autovalori di A abbiano modulo minore di 1.

ii) Determinare condizioni sufficienti su α affinché il metodo di Jacobi applicato ad un sistema con matrice $I + A$ sia convergente

iii) Determinare condizioni sufficienti su α affinchè il metodo di Gauss-Seidel applicato ad un sistema con matrice $I + A$ sia convergente.

iv) Per $\alpha = 1/n$ dire di quanto viene ridotto l'errore iniziale dopo n passi del metodo di Gauss-Seidel e (facoltativo) del metodo di Jacobi.

Esercizio 3. Sia $g(x) \in C^1[a, b]$ tale che $g(\alpha) = \alpha$ dove $\alpha \in [a, b]$.

i) Si dimostri che se $0 \leq g'(x) < 1$ per $x \in [a, b]$ allora tutte le successioni generate da $x_{i+1} = g(x_i)$ con $x_0 \in [a, b]$ convergono ad α.

ii) Si supponga che α disti dal centro $c = (a + b)/2$ dell'intervallo al più θ, cioè $|\alpha - c| \leq \theta$, dove $\theta < \ell = (b - a)/2$. Si dimostri che se $-\frac{\ell-\theta}{\ell+\theta} \leq g'(x) \leq 0$, allora la successione $\{x_i\}_i$ converge ad α per ogni $x_0 \in [a, b]$.

iii) Nelle ipotesi del punto ii si dimostri che se $-\frac{\ell-\theta}{\ell+\theta} \leq g'(x) < 1$ allora la successione $\{x_i\}_i$ converge per ogni $x_0 \in [a, b]$.

Esercizio 4. Si scriva una subroutine in Fortran 90 che dati in input un intero n, un vettore reale $\boldsymbol{x}$ di componenti $x_1, \ldots, x_n$ ed un numero reale z, calcoli e fornisca in output il valore $y = \prod_{i=1,n}(z - x_i)$.