Compito di Analisi Numerica
a.a. 2003-2004, terzo appello, 1/6/2004

Esercizio 1. Sia h un numero reale positivo e si considerino le seguenti tre funzioni per l'approssimazione di $\cos(x)$:

$$\begin{aligned} f_1(x,h) &= (\sin(x+h) - \sin(x))/h \\ f_2(x,h) &= \frac{1}{2}(f_1(x,h) + f_1(x,-h)) \\ f_3(x,h) &= \frac{1}{3}(4f_2(x,h) - f_2(x,2h)) \end{aligned} \tag{1}$$

a) Usando lo sviluppo di Taylor, si diano in funzione di h maggiorazioni al modulo dell'errore relativo commesso per approssimare $\cos(x)$ con ciascuna delle tre funzioni per $x \in [0, \pi/4]$.

b) Sia $\mathcal{F}$ l'insieme dei numeri di macchina con precisione u e sia $\mathrm{SIN}(x) : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tale che $\mathrm{SIN}(x) = \sin(x)(1 + \epsilon(x))$, $|\epsilon(x)| < u$, per $x \in \mathcal{F}$. Si dia una maggiorazione in funzione di h al modulo dell'errore algoritmico relativo alle tre funzioni ottenute da (1) sostituendo $\sin(x)$ con $\mathrm{SIN}(x)$.

c) Per la prima delle tre formule si determini il valore di h che rende la maggiorazione dell'errore valutato al punto a) uguale alla maggiorazione dell'errore valutato al punto b) e si valuti l'errore totale in questo caso.
Facoltativo: fare una analisi analoga per le altre due formule e si dica quale delle formule analizzate risulta più precisa.

Esercizio 2. Dato un numero reale α, sia $M = (m_{i,j})$ la matrice $n \times n$ triangolare superiore con elementi $m_{i,j} = 1$ per $j \geq i$. Sia inoltre $N = \alpha \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$, dove $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1,n}$, $\boldsymbol{v} = (v_i)_{i=1,n}$, $u_i = i$, per $i = 1, \ldots, n$ e $v_i = (-1)^{i+1}$, per $i = 1, \ldots, n-1$ e $v_n = 0$. Si consideri il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con $A = M - N$ e il metodo iterativo $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = M^{-1}(N\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b})$.

a) Si dica per quali valori di α il metodo iterativo è convergente.

b) Sia $\alpha = 3/4$ e $n = 1000$. Si calcoli $\rho(P)$ dove $P = M^{-1}N$ e si dimostri che esiste una norma indotta per cui $||P|| = \rho(P)$. Dire quanti passi occorrono per ridurre l'errore iniziale di un fattore 10^{-6} utilizzando la norma individuata.

c) Sia $\alpha = 3/4$ e $n = 1001$. Si calcoli $\rho(P)$ dove $P = M^{-1}N$ dire se esiste una norma indotta per cui $||P|| = \rho(P)$. Dire quanti passi occorrono per ridurre l'errore iniziale di un fattore 10^{-6} utilizzando la norma ∞.

Esercizio 3. Sia $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^3 che si annulla in x_0. Si supponga di avere a disposizione una *function* `F(X)` in Fortran 90 che fornisce il valore di $f(x)$ in x. Si scriva un programma per approssimare x_0 basato sul metodo ottenuto dalla iterazione di Newton sostituendo $f'(x)$ col rapporto incrementale $(f(x+h) - f(x-h))/(2h)$ dove h è una costante positiva data in input. Si diano condizioni sufficienti su h in funzione del valore delle derivate di $f(x)$ in un intorno di x_0 affinché l'iterazione sia convergente e si studi la velocità di convergenza.