Compito di Analisi Numerica
a.a. 2003-2004, quarto appello, 25/6/2004

Esercizio 1. Sia $\mathcal{F}$ un insieme di numeri di macchina di precisione u. Siano $\mathrm{SIN}(x)$ e $\mathrm{COS}(y)$ due funzioni da $\mathcal{F}$ in $\mathcal{F}$ tali che $\mathrm{SIN}(x) = \sin(x)(1+\epsilon)$, $\mathrm{COS}(x) = \cos(x)(1+\delta)$ con $|\epsilon|, |\delta| < u$. Sia $x \in \mathcal{F}$, $0 \le x \le \pi/2$. Si studi l'errore totale nel calcolo del valore $y = \sin(2x)$ mediante le formule $y = \sin(x+x)$ e $y = 2\sin x \cos x$ applicate con l'aritmetica di $\mathcal{F}$ dove le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ vengono calcolate con $\mathrm{SIN}(x)$ e $\mathrm{COS}(x)$. Si confrontino al variare di x le limitazioni superiori agli errori ottenute con le due formule. Si discutano in particolare i casi $x = 0$ e $x = \pi/2$.

Esercizio 2. Siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$. Si consideri il sistema di $2n$ equazioni e $2n$ incognite $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dove $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ e

$$A = \begin{bmatrix} I & \alpha \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T \\ \alpha \boldsymbol{w}\boldsymbol{z}^T & I \end{bmatrix}.$$

a) Valutare i raggi spettrali delle matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati al sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
b) Dimostrare che $\rho(G) = \rho(J)^2$, e dare condizioni sufficienti su α per la convergenza.
c) Sia $\alpha = 1/(2\sqrt{n})$, $\boldsymbol{u} = (u_i)$, $\boldsymbol{v} = (v_i)$, $\boldsymbol{w} = (w_i)$, $\boldsymbol{z} = (z_i)$ dove $u_i = 1$, $v_i = i$, $w_i = 1/i$, $z_i = (-1)^i$ per $i = 1, \ldots, n$. Dire quante iterazioni del metodo di Jacobi e del metodo di Gauss-Seidel sono sufficienti per ridurre l'errore iniziale di un fattore 10^{-6} se $n = 10000$, e se $n = 10001$.
d) Dire se esiste una norma indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|J\| = \rho(J)$. Dire se esiste una norma indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|G\| = \rho(G)$.

Esercizio 3. Sia $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $x = (x_i)_{i=0,n-1}$ e si definisca $\boldsymbol{y} = \sigma(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{y} = (y_i)_{i=0,n-1}$ tale che $y_0 = x_0$, $y_i = x_{n-i}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Si dimostri che
a) Se $\sigma(\boldsymbol{x}) = \bar{\boldsymbol{x}}$ allora $\mathrm{IDFT}(\boldsymbol{x})$ e $\mathrm{DFT}(\boldsymbol{x})$ sono vettori reali.
b) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ allora $\boldsymbol{y} = IDFT(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{z} = DFT(\boldsymbol{x})$ sono tali che $\bar{\boldsymbol{y}} = \sigma(\boldsymbol{y})$ e $\bar{\boldsymbol{z}} = \sigma(\boldsymbol{z})$
c) Se $\sigma(\boldsymbol{x}) = -\bar{\boldsymbol{x}}$ allora $\mathrm{IDFT}(\boldsymbol{x})$ e $\mathrm{DFT}(\boldsymbol{x})$ sono vettori con componenti immaginarie.
d) Se $\boldsymbol{x}$ ha componenti immaginarie allora $\boldsymbol{y} = IDFT(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{z} = DFT(\boldsymbol{x})$ sono tali che $\bar{\boldsymbol{y}} = -\sigma(\boldsymbol{y})$ e $\bar{\boldsymbol{z}} = -\sigma(\boldsymbol{z})$

Esercizio 4. Si scriva una subroutine che dati in input un intero n e un vettore reale $\boldsymbol{x}$ di n componenti fornisce in output il vettore $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ dove A è la matrice tridiagonale simmetrica $n \times n$ tale che $a_{i,i} = 2$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$.