Esame di Analisi Numerica
a.a. 2003-2004, Appello 5, 1-9-2004

Esercizio 1. a) Si determini nell'insieme dei polinomi di grado al più 3 con coefficienti razionali un polinomio $g(x)$ tale che la successione generata da $x_{k+1} = g(x_k)$ a partire da x_0 in un intorno di $\sqrt{3}$ converga a $\sqrt{3}$ con massimo ordine di convergenza.

b) Nell'insieme di funzioni del tipo $ax^{-1} + b + cx$ con a, b, c razionali si determini una funzione $h(x)$ tale che la successione generata da $y_{k+1} = h(y_k)$ a partire da y_0 in un intorno di $\sqrt{3}$ converga a $\sqrt{3}$ con massimo ordine di convergenza.

c) Confrontare i due metodi per il calcolo approssimato di $\sqrt{3}$ così ottenuti in termini di velocità di convergenza, costo computazionale e stabilità numerica.

d) (Facoltativo) Si assuma che nel punto a) i polinomi abbiano grado al più 2 e coefficienti del tipo p/q con p, q interi di modulo al più 10. Si individui il polinomio $g(x)$ per cui la successione generata abbia massima velocità di convergenza.

Esercizio 2. Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$ tale che $a_{i+1,i} = 1$ per $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{1,i} = u_i$, $a_{i,n} = v_i$, $u_i, v_i \in \mathbb{R}$ per $i = 1, \ldots, n$ (dove $u_n = v_1$), $a_{i,j} = 0$ altrimenti.

a) Dare condizioni sufficienti affinché esista la fattorizzazione LU di A. Descrivere un algoritmo per il calcolo della fattorizzazione LU di A e valutarne il costo computazionale.

b) Sia $P = (p_{i,j})$ la matrice di permutazione tale che $p_{i,n-i+1} = 1$ per $i = 1, \ldots, n$, $p_{i,j} = 0$ altrimenti. Scrivere la matrice $B = PAP$ e dare condizioni sufficienti affinché esista la fattorizzazione LU di B. Descrivere un algoritmo per il calcolo della fattorizzazione LU di B e valutarne il costo computazionale.

c (Facoltativo) Costruire un algoritmo per la risoluzione del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ che richieda $O(n)$ operazioni aritmetiche basato sui risultati del punto a).

Esercizio 3. La funzione $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$ può essere scritta come $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$. Si analizzi l'errore algoritmico nel calcolo di $f(x)$ con i metodi ottenuti dalle due diverse rappresentazioni. Dire quale dei due metodi è numericamente più stabile.

Esercizio 4. Scrivere una *subroutine* in Fortran 90 che, dati in input un intero n, e il vettore reale $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, fornisce in output il vettore $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ che risolve il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dove $A = (a_{i,j})$ è tale che $a_{i,i} = 2$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,j} = 1$, per $i > j$ e $a_{i,j} = 0$ per $i < j$.