Analisi Numerica, primo appello
a.a. 2004-2005
24 Gennaio 2005

Esercizio 1. Dato s_0, sia $s_{i+1} = a_i + b_i/s_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Si denoti con $\widetilde{s}_n$ il valore ottenuto calcolando $s_n = s_n(a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1})$ con le formule precedenti in aritmetica *floating point* con precisione u. Si dimostri che esistono perturbazioni α_i, β_i con $|\alpha_i| \le u$, $|\beta_i| \le 2u + O(u^2)$, per $i = 0, \dots, n-1$, tali che posto $\widetilde{a}_i = a_i(1+\alpha_i)$, $\widetilde{b}_i = b_i(1+\beta_i)$ risulti $\widetilde{s}_n = s_n(\widetilde{a}_1, \dots, \widetilde{a}_{n-1}, \widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_{n-1})$.

Facoltativo: Siano p_i e q_i tali che $s_i = p_i/q_i$. Posto $\mathbf{w}_i = (p_i, q_i)^T$, si dimostri che $\mathbf{w}_{i+1} = A_i \mathbf{w}_i$ per una opportuna matrice A_i. Posto $a_i = a$ e $b_i = b$ per $i = 0, \dots, n-1$, si descriva un algoritmo per il calcolo di s_n con $O(\log n)$ operazioni aritmetiche.

Esercizio 2. Sia $g(z)$ una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabile tre volte con continuità e sia α un suo punto fisso. Si supponga di conoscere le derivate prima e seconda di g in α, $g'(\alpha) = p$, $g''(\alpha) = q$. Si definisca $G(x) = ax + bg(x) + cg(g(x))$ dove a, b, c sono parametri reali. Dare condizioni affinché le successioni definite da $x_{i+1} = G(x_i)$ siano convergenti ad α per x_0 in un intorno di α e determinare i valori di a, b, c che forniscono il massimo ordine di convergenza locale. Si verifichi che il metodo ottenuto è applicabile alla funzione $g(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{22}{15}x$ per il calcolo di $\sqrt{2}$ e determinarne l'ordine.

Esercizio 3. **a)** Sia $A = (a_{i,j})$ una matrice $n \times n$ bidiagonale, cioè tale che $a_{i,j} = 0$ se $i \ne j$ e $i \ne j-1$, ad elementi reali. Si ponga $a_{i,i} = \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$ e $a_{i,i+1} = \beta_i$, $i = 1, \dots, n-1$, $\beta_0 = \beta_n = \alpha_0 = 0$. Dire, motivando le risposte, se le seguenti disuguaglianze sono valide: $||A||_2 \ge \max_i \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_{i-1}^2}$, $||A||_2 \le \max_i \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_{i-1}^2 + |\alpha_{i-1}\beta_{i-1}| + |\alpha_i \beta_i|}$, $i = 1, \dots, n$.

b) Sia B una matrice $n \times n$ ad elementi reali. Si determinino due matrici di Householder P_1 e Q_1 tali che $B_1 = P_1 B Q_1^T$ abbia la prima colonna uguale a $\alpha_1 \mathbf{e}_1$ e la prima riga uguale a $\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \beta_1 \mathbf{e}_2$, dove $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ sono i primi due vettori della base canonica. Si descriva un algoritmo per calcolare una matrice bidiagonale A tale che $A = PBQ^T$ dove P e Q sono matrici ortogonali, e si valuti il costo computazionale del calcolo degli elementi diagonali e sopradiagonali di A.

c) Si usino i risultati di a) e b) per dare stime della norma euclidea di una matrice arbitraria B.

Esercizio 4. Si scriva una *subroutine* o una *function* in Fortran 90 che, dati in input un intero $n \ge 3$ e un vettore $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1,n}$ di n componenti reali calcoli e dia in output il valore $\sum_{i=1}^n x_i x_{1+((i+1) \mod n)}$.