Esame di Analisi Numerica, primo appello, 12/1/2006

Esercizio 1. Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice tridiagonale simmetrica $n \times n$, $n \geq 2$, con elementi $a_{1,1} = \alpha$, $a_{i,i} = 2$, $i = 2, \ldots, n$, $a_{i,i+1} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$.
a) Si dimostri che $\det A = \alpha n - n + 1$.
b) Dare condizioni necessarie e sufficienti su α affinché esista e sia unica la fattorizzazione LU di A.
c) Si descriva un algoritmo per il calcolo di L e di U che richieda non più di $2n - 2$ operazioni aritmetiche.
d) Si dica per quali valori di α tutti gli elementi diagonali di U sono non negativi.
e) (Facoltativo) si dimostri che per ogni α esiste ed è unica la fattorizzazione UL di A dove U è triangolare superiore con elementi diagonali uguali a 1 e L è triangolare inferiore.

Esercizio 2. Sia $g(x) = a - 1/x$ con $a \geq 0$. Determinare al variare di a i punti fissi di $g(x)$ e discutere la convergenza della successione definita da $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, al variare di $x_0 \in \mathbb{R} \backslash 0$. In particolare individuare i casi di convergenza monotona, valutare l'ordine di convergenza e (facoltativo) descrivere l'insieme dei valori di x_0 per cui la successione non è definita.

Esercizio 3. Sia $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$ e $\alpha > 0$ un suo punto fisso. Sia $g_k(x) = g(g(\cdots g(x)) \cdots)$ dove la composizione è fatta k volte.
a) Si valuti il coefficiente di amplificazione di $g_k(x)$ in α.
b) Nell'ipotesi $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ per $|x - \alpha| \leq \rho$, dove $0 < \rho < \alpha$, si valuti, al primo ordine, quanto una perturbazione relativa ϵ in $x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ possa alterare il valore x_k nella successione generata da $x_i = g(x_{i-1})$, $i = 1, \ldots k$.

Esercizio 4. Scrivere una subroutine in Fortran 90 che presi in input i valori di un intero n e di un numero reale x_0 fornisce in uscita un vettore $\boldsymbol{x}$ di componenti $x_1, \ldots, x_n$, tale che $x_i = 2 - 1/x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$.