Analisi Numerica, secondo appello
a.a. 2004-2005
7 Febbraio 2005

Esercizio 1. Siano $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ tali che $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} + \underline{i}\boldsymbol{y}$, dove $\underline{i}$ è l'unità immaginaria. Dire quali delle seguenti applicazioni sono norme:

$$\boldsymbol{a} \to \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1$$
$$\boldsymbol{a} \to (\|\boldsymbol{x}\|_2^2 + \|\boldsymbol{y}\|_2^2)^{1/2}$$
$$\boldsymbol{a} \to \textstyle\sum_{j=1,n} j|a_j|$$

Per le applicazioni che risultano norme esprimere la norma matriciale indotta in funzione degli elementi della matrice.

Esercizio 2. La matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ha m autovalori uguali ad $a \in \mathbb{R}$ e $n-m$ autovalori uguali a $b \in \mathbb{R}$.
i) Dire sotto quali condizioni su a e b esiste un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che le successioni definite da $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = G_\alpha(\boldsymbol{x}^{(k)})$, con $G_\alpha(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \alpha(\boldsymbol{f} - A\boldsymbol{x})$, convergono alla soluzione del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$ con $\boldsymbol{f} \in \mathbb{C}^n$ per ogni $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Nelle ipotesi di esistenza determinare il valore di α che massimizza la velocità di convergenza.
ii) Dire sotto quali condizioni su a e b esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che le successioni generate da $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = G_\alpha(G_\beta(\boldsymbol{x}^{(k)}))$ convergono alla soluzione del sistema per ogni $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. In caso di convergenza determinare i valori ottimali di α e β.
iii) (Facoltativo) Con i valori di α e β ottenuti al punto ii) studiare la velocità di convergenza delle successioni generate al punto ii) se A ha m autovalori in $[a-\epsilon, a+\epsilon]$, e $n-m$ autovalori in $[b-\epsilon, b+\epsilon]$, dove $|a|, |b| > 1$ e $0 < \epsilon < |a-b|/4$.

Esercizio 3. Discutere la convergenza locale del metodo di Newton applicato alla funzione $f(x) = x + |x|^k$ in un intorno di 0 dove $k \geq 1$ è un numero reale.
Facoltativo: discutere il caso $0 < k < 1$.

Esercizio 4. Scrivere una *subroutine* o una *function* in linguaggio Fortran 90 che presi in input un numero reale x e un intero $k \geq 0$ calcola e dà in uscita il numero reale $\sum_{i=0}^{k} x^{2^i}$.