Compito di Analisi Numerica
a.a. 2004-2005
terzo appello, 30 Maggio 2005

Esercizio 1. Sia $n \geq 3$ intero e $\boldsymbol{u} = (u_i), \boldsymbol{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq 0$. Si consideri la matrice $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $b_{1,i+1} = v_i$, $b_{i+1,1} = u_i$ per $i = 1, \dots, n-1$, $b_{i,j} = 0$ altrove.
a) Si dimostri che esiste una matrice di Householder P tale che $PB(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})P^T = B(\alpha \boldsymbol{e}_1, \widehat{\boldsymbol{v}})$ dove $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $\widehat{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Si deduca che B ha $n-2$ autovalori nulli e due autovalori di modulo $|\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{u}|^{1/2}$.
b) Si determinino i raggi spettrali delle matrici J e G rispettivamente dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel applicati al sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dove $A = I - B$. Si diano condizioni sui vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ per la convergenza dei due metodi e si confrontino le velocità di convergenza.
c) Posto $u_i = i$, per $i = 1, \dots, n-1$, e $v_i = 1$ se $i = 0 \bmod 4$, o se $i = 1 \bmod 4$, $v_i = -1$ altrimenti, si dica se si ha convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel per $n = 4000$ e $n = 4001$. Nel caso di convergenza si dica per i due metodi quante iterazioni sono sufficienti a ridurre l'errore iniziale di un fattore almeno 10^{10} in norma infinito.

Esercizio 2. Sia $n = 2^k$ dove k è un intero positivo. Si valuti l'errore algoritmico nel calcolo di $f(x) = x^n$ mediante i seguenti metodi con un'aritmetica *floating point* di precisione u assumendo che non si incontrino situazioni di *overflow* e di *underflow*:
a) $s_1 = x$, $s_{i+1} = x * s_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$;
b) $s_1 = x$, $s_{i+1} = s_i * s_i$, $i = 1, 2, \dots, k$;
c) $\mathrm{EXP}(n * \mathrm{LOG}(x))$, dove EXP e LOG sono funzioni definite sull'insieme di numeri *floating point* tali che $\mathrm{EXP}(x) = (1 + \epsilon)e^x$, $\mathrm{LOG}(x) = (1 + \delta)\log x$, $|\epsilon|, |\delta| < u$. Si confrontino i metodi in base all'errore algoritmico e al costo computazionale dove si assume che le funzioni LOG ed EXP abbiano un costo pari a quello di 10 operazioni aritmetiche.

Esercizio 3. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ sia $f_\alpha(x) = x \log |x + \alpha|$, dove per $\alpha = 0$ si definisce $f_\alpha(0) = 0$. Si determinino gli zeri di $f_\alpha(x)$ e si dica se il metodo di Newton è applicabile per la loro approssimazione. Studiare la convergenza locale del metodo di Newton, se applicabile, determinandone l'ordine.

Esercizio 4. Si scriva una subroutine in Fortran 90 che presi in input l'intero n, i vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ di $n-1$ componenti e i vettori $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}$ di n componenti restituisce il vettore $\boldsymbol{y}$ ottenuto dopo un passo del metodo di Jacobi applicato al vettore $\boldsymbol{w}$ nella risoluzione del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dell'esercizio 1.