Compito di Analisi Numerica
a.a. 2004-2005
quarto appello, 30 Giugno 2005

Esercizio 1. Sia $a > 0$ e $f(x) = x + a\sqrt[3]{x^2}$. Per $x \neq 0$ sia $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ e, fissato $x_0 \neq 0$ si consideri la successione $\{x_k\}$ definita da $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$. Si dimostri che
a) $f(x) = 0$ se e solo se $x \in \{0, -a^3\}$; inoltre $\{x_k\}$ converge quadraticamente a $-a^3$ per x_0 in un intorno di $-a^3$;
b) $\{x_k\}$ converge a $-a^3$ per ogni $x_0 < -8/27a^3$ e la convergenza è monotona per $x_0 < -a^3$;
c) la convergenza è lineare in un intorno di 0; determinare il fattore di convergenza.

Esercizio 2. Sia $A_n(\alpha, \beta, \gamma) = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$ tale che $a_{1,1} = \alpha$; $a_{i,i} = 1$, $a_{1,i} = \beta$, $a_{i,i-1} = \gamma$, per $i = 2, \ldots, n$; $a_{i,j} = 0$ altrove, dove $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ sono reali.
a) Si applichi un passo di eliminazione gaussiana al sistema $A_n(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, per $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ e si dimostri che la matrice del sistema di dimensione $n-1$ ottenuto eliminando l'incognita x_1 ha la forma $A_{n-1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ per opportuni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$.
b) Si dimostri che se $\alpha > -\gamma > 0$ e $\beta > \alpha(1 + 1/\gamma)$ allora la strategia del massimo pivot parziale non comporta permutazioni di righe.
c) si valuti il costo computazionale della fase di eliminazione e della fase di sostituzione all'indietro e si descriva un algoritmo di costo lineare in n per la risoluzione del sistema.

Esercizio 3. Dato un intero $n > 0$ e assegnati i numeri reali positivi a_i, b_i, c_i per $i = 0, 1, \ldots, n$, si definisca $x_{i+1} = a_i + c_i b_i / x_i$, per $i = 0, 1, \ldots n$, dove $x_0 > 0$ è assegnato. Siano $\tilde{x}_i$ i valori ottenuti calcolando gli x_i con aritmetica *floating point* con precisione u. Dire se esistono perturbazioni $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ tali che posto $\tilde{a}_i = a_i(1 + \alpha_i)$, $\tilde{b}_i = b_i(1 + \beta_i)$, $\tilde{c}_i = c_i(1 + \gamma_i)$, risulta $\tilde{x}_{i+1} = \tilde{a}_i + \tilde{c}_i \tilde{b}_i / \tilde{x}_i$; in tal caso si diano maggiorazioni a $|\alpha_i|, |\beta_i|, |\gamma_i|$ in funzione di u.
Svolgere una analisi analoga nel caso del calcolo di $x_{i+1} = a_i + c_i b_i / (a_i x_i)$.

Esercizio 4. Si scriva una subroutine in Fortran 90 che, presi in input un intero $n > 0$ e due vettori reali b, c di n componenti, dia in output il valore x_{n+1} definito da $x_{i+1} = x_i + c_i b_i / x_i$, $i = 1, \ldots, n$, con $x_1 = 1$.