Esame di Analisi Numerica, quinto appello, 19/9/2005

Esercizio 1. Si verifichi che i punti fissi della funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1 + (x-1)^2 & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{24}{25} + (x - \frac{4}{5})^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

sono $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ e si discuta la convergenza della successione generata da $x_{k+1} = g(x_k)$ al variare di x_0. Più precisamente
a) Si dimostri che esiste un intervallo destro U di α tale che per $x_0 \in U$ la successione converge in modo monotono e quadratico; si determini il massimo intorno U per cui vale questa proprietà.
b) Si dimostri che esiste un intervallo sinistro V di α tale che per $x_0 \in V$ la successione converge in modo monotono e lineare; si determini il massimo intorno V per cui vale questa proprietà.
c) Determinare gli insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ per cui la successione converge rispettivamente ad α per ogni $x_0 \in \mathcal{A}$ e a β per ogni $x_0 \in \mathcal{B}$. Determinare l'insieme dei valori x_0 per cui non si ha convergenza.

Esercizio 2. Sia A la matrice tridiagonale $n \times n$, dove n è pari, tale che $a_{i,i} = (-1)^i \alpha$, per $i = 1, \dots, n$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$ per $i = 1, \dots, n-1$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per la risoluzione del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ si consideri il metodo iterativo $M\boldsymbol{x}_{k+1} = N\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b}$, ottenuto dal partizionamento $A = M - N$, dove M è la matrice diagonale a blocchi 2×2 con blocchi diagonali $\begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$.
a) Dimostrare che la successione $\{\boldsymbol{x}_k\}$ è ben definita per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Dare condizioni sufficienti su α per la convergenza del metodo e dare una limitazione superiore al raggio spettrale della matrice di iterazione.
c) Confrontare il metodo col metodo di Jacobi, più precisamente mostrare che esistono valori di α per cui il metodo è convergente mentre il metodo di Jacobi non lo è.

Esercizio 3. Dire se le seguenti applicazioni sono norme, e in caso affermativo determinarne la norma indotta sulle matrici.
a) $\boldsymbol{x} \to \sum_{i=1}^{n-1} |x_i - x_{i+1}|$
b) $\boldsymbol{x} \to |x_n| + \sum_{i=1}^{n-1} |x_i - x_{i+1}|$
c) $\boldsymbol{x} \to \min_i |x_i| + \sum_{i=1}^{n-1} |x_i - x_{i+1}|$

Esercizio 4. Si scriva un programma in Fortran 90 che legge da tastiera un intero n, calcola l'espressione $\sum_{i=1}^{n} (1/i + (-1)^i/i^2)$ e riporta il risultato sullo schermo.