Compitino di Analisi Numerica

Esercizio 1. Si studi l'errore inerente della funzione $f(x,y) = (x+y)^2$. Si considerino due algoritmi per il calcolo di $f(x,y)$ basati rispettivamente sulle formule

$$f(x,y) = x(x+y) + y(x+y),$$
$$f(x,y) = (x+y)^2.$$

Si dia una maggiorazione dell'errore algoritmico nei due casi.

Esercizio 2. Si dimostri che l'applicazione da $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{R}$ $\boldsymbol{x} \to ||\boldsymbol{x}||_1 + ||\boldsymbol{x}||_\infty$ è una norma e si descriva l'insieme $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \quad ||\boldsymbol{x}|| = 1\}$. Facoltativo: dimostrare che $\boldsymbol{x} \to (\boldsymbol{x}^H A \boldsymbol{x})^{1/2}$ è una norma se A è hermitiana definita positiva e si determini la norma matriciale indotta.

Esercizio 3. Localizzare gli autovalori della matrice

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}.$$

usando i cerchi di Gerschgorin di A e di A^T. Dimostrare in particolare che tutti gli autovalori sono reali e non nulli.

Esercizio 4. Usando la forma normale di Schur si determini l'insieme dei possibili autovalori delle matrici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ che risolvono l'equazione $A^2 - 5A^H + 6I = 0$.

Esercizio 5. Sia $A = (a_{i,j})$ una matrice $n \times n$ tale che $a_{i,j} = 0$ per $j > i+1$, e $a_{i,i+1} = 1$ per $i = 1, \ldots, n-1$. Ad esempio, per $n = 4$ la matrice A ha la seguente forma (dove "*" deonota un elemento non necessariamente nullo di A).

$$\begin{bmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Si costruisca una matrice elementare di Gauss E_1 tale che $E_1 A$ abbia l'ultima colonna uguale a $\boldsymbol{e}_{n-1}$ (dove $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$ sono i versori della base canonica di $\mathbb{R}^n$). Si verifichi che anche l'ultima colonna di $A_2 = E_1 A E_1^{-1}$ coincide con $\boldsymbol{e}_{n-1}$. Si costruisca poi una matrice elementare di Gauss E_2 tale che $E_2 A_2$ abbia la penultima colonna uguale a $\boldsymbol{e}_{n-2}$, e si verifichi che anche la matrice $A_3 = E_2 A_2 E_2^{-1}$ ha la penultima colonna uguale a $\boldsymbol{e}_{n-2}$. Si generalizzi il procedimento in modo che alla fine la matrice $A_n = (a_{i,j}^{(n)})$ così ottenuta abbia le colonne dalla seconda all'n-esima uguali a $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ cioè (nel caso $n = 4$)

$$\begin{bmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & 1 \\ * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Facoltativo: si ricavi un algoritmo per il calcolo dei coefficienti del polinomio caratteristico di A e si valuti il costo computazionale.