Compitino 1 di Analisi Numerica, a.a. 04-05
19 Novembre 2004

Esercizio 1. Si scriva un programma in fortran 90 che dati in input un intero n e un numero reale x calcoli $s_n = x + 1/(x + 1/(\cdots + 1/(x + 1/x)\cdots))$, dove l'operazione di addizione compare n volte. Ad esempio, $s_1 = x + 1/x$, $s_2 = x + 1/(x + 1/x)$.

Esercizio 2. La funzione $f(x, y) = (x - y)/x$ puó essere scritta come $f(x, y) = 1 - y/x$ oppure come $f(x, y) = 1/(1 - 1/(1 - x/y))$. Si diano maggiorazioni degli errori algoritmici generati nel calcolare il valore di f secondo le tre formule quando x, y sono due numeri *floating point* con precisione u. Si commenti sulla stabilità numerica dei tre algoritmi.

Esercizio 3. Sia A matrice $n \times n$ non singolare e $||\cdot||$ una norma su $\mathbb{C}^n$. Si dimostri che per la norma indotta $||A^{-1}||$ vale $||A^{-1}|| = \max_{\boldsymbol{x}\neq 0} ||\boldsymbol{x}||/||A\boldsymbol{x}||$. Si usi questa proprietà per dare limitazioni inferiori al numero di condizionamento in norma ∞ della matrice $A = (a_{i,j})$ tale che $a_{i,j} = 0$ se $i < j$, $a_{i,j} = -1$ se $i > j$, $a_{i,i} = 1$, avendo scelto $\boldsymbol{x} = (x_i)$, $x_i = 2^{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$.

Esercizio 4. Siano $C = (c_{i,j})$ e $D = (d_{i,j})$ matrici $n \times n$, con $n \geq 2$ tali che $c_{i,j} = 1$ se $i - j = 1 \bmod n$, $c_{i,j} = 0$ altrimenti, $d_{i,j} = i$ per $i = j$, $d_{i,j} = 0$ altrimenti. Sia $A(t) = D + tC$.

a) Utilizzando i teoremi di Gerschgorin si diano condizioni sufficienti su t affinché la matrice $A(t)$ abbia autovalori reali.

b) Per $\epsilon \neq 0$, sia $F_\epsilon = (f_{i,j})$ tale che $f_{i,j} = \epsilon c_{i,j}$ per $i \geq j$, $f_{i,j} = \epsilon^{1-n} c_{i,j}$ per $i < j$. Si dimostri che la matrice $A(t)$ è simile alla matrice $A_\epsilon(t) = D + tF_\epsilon$ per ogni $\epsilon \neq 0$.

c) Applicando i teoremi di Gerschgorin a $A_\epsilon(t)$ e $A_\epsilon(t)^T$ si diano condizioni sufficienti affinché $A(t)$ abbia autovalori reali.

Esercizio 5. Sia α un numero reale e si consideri la classe $\mathcal{A}(\alpha)$ delle matrici $n \times n$ a elementi complessi A tali che $\alpha A + A^H A + A^H = I$. Utilizzando la forma normale di Schur, si descriva l'insieme $\Lambda(\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad \exists A \in \mathcal{A}(\alpha), \quad \det(A - \lambda I) = 0\}$.