Secondo Compitino di Analisi Numerica
a.a. 2004-2005
13 Gennaio 2005

Esercizio 1. Siano n, k interi positivi tali che $1 < k < n$. Si considerino i metodi di Jacobi e di Gauss Seidel applicati per la risoluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $A = (a_{i,j})$ è una matrice $n \times n$ tale che $a_{i,j} \neq 0$ se $i = j$, o se $i = j+1$ oppure $i = j-k$, mentre $a_{i,j} = 0$ nei casi rimanenti. Si dimostri che la riduzione asintotica media dell'errore per passo del metodo di Gauss-Seidel è la potenza $(k+1)$-esima della riduzione asintotica media dell'errore per passo del metodo di Jacobi. Svolgere una analoga analisi per la matrice A^T e individuare la relazione fra le riduzioni asintotiche medie dell'errore per passo del metodo di Jacobi e del metodo di Gauss-Seidel.

Esercizio 2. Siano a e b tali che $a + b = 1$. Si determinino i punti fissi di $g(x) = ax + bx^{-1}$. Si diano condizioni su a e b per la convergenza locale del metodo di iterazione funzionale definito dalla relazione $x_{k+1} = g(x_k)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, al variare di a e b in $\mathbb{R}$ e se ne analizzi la velocità di convergenza. Si dimostri che per $a = b = 1/2$ le successioni generate dal metodo sono convergenti per ogni $x \neq 0$.

Esercizio 3. Utilizzando l'algoritmo FFT, si costruisca un metodo che, dati in input due interi positivi n e q e i coefficienti del polinomio $a(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, calcoli i coefficienti $b_0, \ldots, b_{mn}$ del polinomio $b(x) = a(x)^m$, dove $m = 2^q$, col minimo numero possibile di operazioni aritmetiche.
Facoltativo: Dire se il metodo può essere esteso al calcolo dei coefficienti di $A(x)^m$ dove $A(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i A_i$, e A_i sono matrici $p \times p$ e, nel caso, valutarne il costo computazionale.

Esercizio 4. Siano $x_0 \neq x_1$ due numeri reali e $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile 3 volte con continuità. Si dimostri che esiste ed è unico il polinomio $p(x)$ di grado al più 2 tale che $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1$, $p'(x_0) = f'(x_0)$. Si supponga per semplicità $x_0 < x_1$ e si dimostri che per ogni $x \in [x_0, x_1]$ esiste $\xi \in (x_0, x_1)$ tale che $f(x) - p(x) = (x - x_0)^2 (x - x_1) f'''(\xi)/6$. Posto $x_0 = 0, x_1 = \pi/4$ e $f(x) = \sin(x)$ si calcolino i coefficienti di $p(x)$ e si diano maggiorazioni a $|f(x) - p(x)|$.