Secondo Compitino di Analisi Numerica, a.a. 2003-04
18 Dicembre 2003

Esercizio 1. Sia A la matrice $n \times n$ definita da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha \\ -\alpha & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & -\alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \neq 0.$$

a) Si scrivano le matrici di iterazione J e G rispettivamente del metodo di iterazione di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati al sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

b) Si diano condizioni necessarie e sufficienti su α affinché $\rho(J) < 1$ e affinché $\rho(G) < 1$, dove ρ indica il raggio spettrale.

c) Si dimostri che vale $\rho(G) = \rho(J)^n$.

d) Facoltativo: Si dica quante iterazioni del metodo di Gauss-Seidel sono sufficienti per ridurre di un fattore 10^{-3} la norma infinito dell'errore iniziale se $n = 1024$ e $\alpha = 1/2$.

Esercizio 2. Sia $g(x) = 1 + a \log x + b \log^2 x$, con $a, b \in \mathbb{R}$, e si osservi che $x = 1$ è un punto fisso di $g(x)$. Si discuta la convergenza locale e l'ordine di convergenza delle successioni generate dall'iterazione $x_{i+1} = g(x_i)$ quando x_0 viene scelto in un intorno di 1, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$. Più precisamente:

a) Se $0 < |a| < 1$ si dimostri che la convergenza è lineare e si dica sotto quali condizioni la convergenza è localmente monotona.

b) Se $a = 0$ si dimostri che la convergenza è superlineare e si determini l'ordine di convergenza. Dire sotto quali condizioni la convergenza è monotona.

c) Facoltativo. Si analizzi il caso in cui $|a| = 1$ e si dica sotto quali condizioni si ha convergenza e si determini il tipo di convergenza.

Esercizio 3. Sia $f(x) = e^x$ e $p_n(x)$ il polinomio di interpolazione di $f(x)$ relativo ai nodi $x_i = i/n$, $i = 0, \dots, n$, dove n è un intero positivo. Si dimostri che $\forall x \in [0, 1]$ risulta $\lim_n p_n(x) = f(x)$.

Esercizio 4. Si scriva una function o una subroutine in Fortran90 che dati in input un intero n e due vettori reali x, y di n componenti, fornisce in uscita il numero reale $s = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.