UNIVERSITA' DI PISA CORSO DI LAUREA IN FISICA
ANALISI MATEMATICA II (VO) e ANALISI MATEMATICA IV (NO)
Compitino di verifica intermedia del 10 Aprile 2002

1.(i) Dimostrare indicando tutti i calcoli che in $\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot}\,(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3},) = 0$$

dove $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

(ii) Se u e v sono due campi vettoriali di classe C^1 in un aperto $A \subset \mathbb{R}^3$ tali che $\operatorname{div} u = 0, \quad \operatorname{div} v = 0$ allora dimostrare indicando tutti i calcoli che si ha

$$\operatorname{rot}\,(u \wedge v) = (v|\nabla)u - (u|\nabla)v$$

2. Dimostrare che il seguente insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 4\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

è un dominio regolare, disegnare e descrivere una sua decomposizione come una unione di domini normali

3. (i) Determinare il parametro reale a tale che la seguente forma differenziale

$$\omega_a = \frac{\mathrm{d}x}{y^2+1} - \frac{axy\mathrm{d}y}{(y^2+1)^2}$$

sia chiusa e dire (giustificando la risposta) se ω_a per questo parametro a è esatta

(ii) Dimostrare che la curva definita da

$$\gamma : [0, 2\pi] \to (x(t), y(t)) = (\mathrm{e}^{\sin t}, \frac{2\cos t}{\cos^2 t + 1})$$

è una curva regolare di classe C^1 nel piano $\mathbb{R}^2$

(iii) Calcolare l'integrale curvilinea $\oint_\gamma \omega_a$ dove $a \in \mathbb{R}$ determinata nel punto (i)