UNIVERSITA' DI PISA - CORSO DI LAUREA IN FISICA

ANALISI MAT. II (V. Ord.)/ANALISI MAT. III e IV (N. Ord.)

Esame scritto del 12 Settembre 2002

1. Scrivere la serie di Fourier della seguente funzione definita in $[0, \pi]$ e estesa come funzione pari e periodica

$$f(x) = \frac{x(\pi - x)}{2} \quad \text{per} \quad x \in [0, \pi]$$

e discutere la convergenza di questa serie di Fourier.

2. Studiare la funzione

$$f(x, y) = \log |x + y^2| - (x^2 + y^2)$$

In particolare, disegnare suo dominio, determinare eventuali punti stazionari e classificarli.

3. (a) Calcolare la misura di Lebesgue del insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 1 < x \leq 2,\ y > 0,\ z + 1 \geq 0,\ x - y^2 - 4(z + 1)^2 > 1\}$$

(b) Calcolare l'integrale

$$\int\int\int_E y(z+1)^3 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

4. Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (x^3y, -x^2y^2, -x^2yz)$ attraverso la superficie S definita da

$$S = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ -2 \leq z \leq 2\}.$$

5. Si consideri il sistema lineare omogeneo $\dot{u} = Au$ dove A è la matrice antisimmetrica definita da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si trovi la matrice di transizione e^{tA} del sistema e ne si determini il determinante.
(ii) Si mostri che la matrice di transizione e^{tA} è un'isometria per ogni valore di t.

Note:

Per sostenere l'esame di **Analisi III** vanno risolti gli esercizi 1, 2 e 3 mentre per sostenere l'esame di **Analisi IV** vanno risolti gli esercizi 3, 4 e 5; il tempo disponibile è di **tre ore**.

Per sostenere l'esame di **Analisi II** (o l'esame di **Analisi III e IV congiuntamente** vanno risolti quattro esercizi; in questo caso il tempo disponibile è di **tre ore e mezza**.

I risultati del compito potrebbero essere disponibili all'indirizzo

www.dm.unipi.it/~carminat