UNIVERSITA' DI PISA CORSO DI LAUREA IN FISICA
Esame Scritto di ANALISI MATEMATICA II (Vecchio Ordinamento)
ANALISI MATEMATICA III e IV (Nuovo Ordinamento)
del 14 Giugno 2002

1. Dimostrare che l'equazione

$$f(x,y) = \log(1 - x^2y + e^{xy} - x^3 + y^2) = 0$$

definisce,in un intorno del punto $P = (1,0)$, una curva regolare $x = \varphi(y)$ che passa per il punto P. Studiare il comportamento della funzione $\varphi(y)$ in un intorno del punto $y = 0$.

2. Sia $r > 1$, si indichi con $A_r \subset \mathbb{R}^2$ la corona circolare

$$A_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1/r^2 \leq x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

Si determini una funzione $\phi \in C^1(A_r, A_r)$ che preservi le aree e scambi il bordo interno col bordo esterno, cioé tale che

(i) $m(\phi(D)) = m(D)$ per ogni $D \subset A_r$ misurabile.

(ii) $\phi(\{x^2+y^2 = r^2\}) = \{x^2+y^2 = 1/r^2\}$, $\quad \phi(\{x^2+y^2 = 1/r^2\}) = \{x^2+y^2 = r^2\}$.

[Sugg: si lavori in coordinate polari e si cerchi una funzione della forma $\phi(\rho,\theta) = (g(\rho),\theta)$...]

3. Disegnare il dominio E in $\mathbb{R}^2$ limitato dalle due curve di equazioni $\gamma : x^2 + y^2 = 9$ e $\sigma : x^2 + (y-1)^2 = 1$. Utilizzando la formula di Green calcolare l'integrale della forma diiferenziale $\omega = \frac{(y-1)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+(y-1)^2}$ sulla curva γ

3'. Si calcoli l'area della superficie $S_r \subset \mathbb{R}^3$ definita da

$$S_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2),\ r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Si calcoli inoltre il limite $\lim_{r\to 0^+} \mathrm{Area}(S_r)$.

4. Si consideri il sistema lineare omogeneo $\dot{u} = Au$ dove A è la matrice simmetrica definita da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si trovi la matrice di transizione e^{tA} del sistema e ne si determini il determinante.
(ii) Si risolva l'equazione non omogenea $\dot{u} = Au + f(t)$ dove $f(t) = (-1, t, 1-t)$.

5. Si determini l'equazione di Eulero Lagrange del funzionale

$$I(u) = \int_a^b \frac{|u'|^2}{1+u^2}dt,$$

soggetto alle condizioni al bordo $u(a) = 2$, $u(b) = 0$.

Note:
Per sostenere l'esame di **Analisi III** vanno risolti gli esercizi 1, 2 e 3 mentre per sostenere l'esame di **Analisi IV** vanno risolti gli esercizi 3, 4 e 5; il tempo disponibile è **tre ore**.
Per sostenere l'esame di **Analisi II** (o l'esame di **Analisi III e IV congiuntamente**) vanno risolti quattro esercizi a scelta; in questo caso il tempo disponibile è **tre ore e mezzo**.