ANALISI II - 19.12.2001 - Primo compitino

1. Sia $f(x,y) = xye^{-(4x^2+y^2)}$; si faccia uno studio qualitativo di f; in particolare:
   (a) si trovino i punti critici di f e si dica se si tratta di massimi o minimi locali;
   (b) si tracci un disegno qualitativo delle curve di livello di f;
   (c) Si calcoli lo sviluppo di Taylor di ordine 4 di f vicino a zero.

   Infine, detto $D = \{4x^2 + y^2 \leq 1/4\}$ si determinino
   $$\max_{(x,y)\in D} f(x,y), \qquad \min_{(x,y)\in D} f(x,y).$$

2. Si determini il punto di C che minimizza la distanza dal punto $(1,1,1)$ nei seguenti casi:
   (a) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2x + y + z = 0\}$
   (b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2x + y + z = 0,\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

3. Sia $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^\mathbf{n} \setminus \{\mathbf{0}\}$ la funzione definita da
   $$\phi(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x}}{|\mathrm{x}|^2}.$$
   (a) Si calcoli la matrice jacobiana di tale funzione.
   (b) Si calcoli il determinante e la traccia della matrice jacobiana di J_ϕ nel punto di coordinate $(a, 0, ..., 0)$ dove $a > 0$.
   (c) Si calcol il determinante e la traccia della matrice jacobiana di J_ϕ in un generico punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.
   (d) * Si mostri che, detta $A = J_\phi(\mathrm{x})$ e $\lambda = 1/|\mathrm{x}|^4$, vale la relazione $A^T A = \lambda I$ (cioè A è conforme).

[L' esercizio asteriscato e' da intendersi facoltativo.]

Nota: i risultati del compitino potrebbero apparire in rete all'indirizzo
http://www.dm.unipi.it/ carminat/
prima di gennaio. La correzione invece va all'anno prossimo.