UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PISA CORSO DI LAUREA IN FISICA

**COMPITO DI ANALISI MATEMATICA II**

**del 22 Novembre 2001**

1. Si consideri l'insieme $M(2\times 2)$ delle matrici $2\times 2$ a coefficienti reali come uno spazio vettoriale identificato con $\mathbb{R}^4$ (cioè,

$$M(2\times 2) = \{A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}; \quad (x,y,z,t)\in \mathbb{R}^4\})$$

(a) Dimostrare che il sottoinsieme

$$\Sigma = \{A \in M(2\times 2); \quad det A = 1\}$$

è una ipersuperficie regolare in $\mathbb{R}^4$.

(b) Determinare lo spazio tangente alla superficie $\Sigma$ nel punto $I\in\Sigma$ e nel punto $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dove $\theta = \frac{\pi}{3}$

(c) (Facoltativo) Dimostrare che l'iperpiano tangente a $\Sigma$ in un punto generico $A\in\Sigma$ può essere espressa nella seguente forma:

$$T_A(\Sigma) = \{K = AH; \quad H\in M(2\times 2): \quad Tr(H) = 0\}$$

2. Studiare la seguente funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2 - 1}{\sqrt{|4x^2 + y^2 - 4|}}$$

in particolare, determinare il dominio di definizione, proprietà di continuità e di esistenza del differenziale e dell'hessiano e classificare gli eventuali punti stazionari.

3. Calcolare il laplaciano

$$\Delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

della funzione $u(x,y,z) = \sin(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$