UNIVERSITA' DI PISA CORSO DI LAUREA IN FISICA
Esame Scritto di ANALISI MATEMATICA II (Vecchio Ordinamento)
del 24 Luglio 2002

1. Studiare la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2-4}{y^2-4x^2-1}$$

in particolare disegnare il suo dominio di definizione e l'insieme degli zeri; determinare e classificare i punti stazionari (punti di massimo o minimo relativo ecc.)

2. (a) Dimostrare che il seguente insieme è misurabile e di misura di Lebesgue finita

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 4x^2+z^2 \leq 4,\ y \geq \sqrt{4x^2+z^2},\ y \leq 4x^2+z^2\}$$

(b) Calcolare l'integrale

$$\int\int\int_E \frac{y^2}{(1-4x^2-z^2)\sqrt{y-1}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

3. Se Σ è la parte della superficie cilindrica $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2=1\}$ compresa fra i due piani $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z=0 \quad \text{e} \quad z=2\}$ calcolare l'integrale

$$\int\int_\Sigma (x^2y+z^2)\mathrm{d}\Sigma$$

4. Dimostrare che la seguente forma differenziale ω è esatta:

$$\omega = y(3x^2y-1)\mathrm{d}x + x(2x^2y-1)\mathrm{d}y$$

determinare una sua primitiva e calcolare, utilizzando l'esattezza della forma ω, l'integrale $\int_\sigma \omega - \int_\gamma \omega$ dove σ e γ sono le due curve regolari in $\mathbb{R}^2$ definite da $\sigma(t) = (t, 1-t^4);\ t \in [-1, \frac{1}{2}]$ e $\gamma(t) = (t, 3t^2-3);\ t \in [-1, \frac{3}{4}]$