CdL in FISICA - COMPITINO di ANALISI II
30.5.2002

1. Sia dato il campo vettoriale $F \in C^\infty(\mathrm{R}^3; \mathrm{R}^3)$ definito da
$$F(x, y, z) = [x,\ y\phi(y),\ -2z\phi(y)]$$
   (a) Si determini la funzione ϕ in modo che si abbia $\phi(1) = 0$ e
   $$\int_{\partial\Omega} F\, d\sigma = 0$$
   per ogni aperto limitato e regolare $\Omega \subset \mathrm{R}^n$.

   (b) Per tale scelta della funzione ϕ si calcoli il flusso
   $$\int_S F\, d\sigma$$
   sulla superficie $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2;\ z \geq 1\}$.

2. Si consideri l'equazione differenziale omogenea
$$u'' - 2u' + (1 - \epsilon^2)u = 0,$$
dove $\epsilon \in (0, 1)$ è un parametro reale.
   (a) Si scriva il sistema del primo ordine associato.

   (b) Detta A_ϵ la matrice che definisce tale sistema si calcoli la matrice di transizione e^{tA_ϵ} ed anche il suo determinante.

   (c) Si mostri che $\forall t \in \mathrm{R}$
   $$\lim_{\epsilon \to 0} e^{tA_\epsilon} = e^{tA_0}$$
   (nel senso che c'è convergenza componente per componente). Facoltativo: si mostri che la convergenza è uniforme (in t) sugli insiemi compatti di R.

3. Si calcoli la rasformata di fourier della funzione
$$f(x) = xe^{-x^2+bx+c}$$
dove b, c sono parametri reali.