UNIVERSITA' DI PISA CORSO DI LAUREA IN FISICA
Esame Scritto di ANALISI MATEMATICA II (Vecchio Ordinamento)
ANALISI MATEMATICA III e IV (Nuovo Ordinamento)
del 4 Luglio 2002

1. Si consideri l'insieme $S \subset \mathbb{R}^3$ definito da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z^2 - xy - 1 = 0\}.$$

Si verifichi che S è una superficie regolare, si dimostri che su S esiste un punto che minimizza la distanza dall'origine e si individui tale punto.

2. Si consideri la successione di funzioni definita da

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{|\log x|^n x^{3n-2}}{2^n (n-1)!} & \text{per} \quad x > 0 \\ 0 \quad \text{per} \quad x = 0 \end{cases}$$

Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ per convergenza puntuale, uniforme e totale

3. Dimostrare che l'insieme $E \subset \mathbb{R}^3$ limitato dalla paraboloide di equazione $2x^2+y^2-z = 0$ e dalla superficie cilindrico $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \; z = 4 - y^2\}$ è un insieme misurabile di misura finita e calcolare la misura di E.

4. Sia $F \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{R}^3)$ il campo vettoriale definito da

$$F = [\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}] \;\text{ dove }\; r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

(i) Si verifichi che $\mathrm{div} F = 0$.
(ii) Si calcoli (direttamente!) il flusso di F attraverso la sfera di raggio $r > 0$ e centro l'origine.
(iii) Si calcoli (usando il teorema della divergenza) il flusso di F attraverso la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \; z = 2(x^2 + y^2) - 1\}$.

5. Trovare una soluzione generale del seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} u'' - 3u' + v = 2e^x \cos x \\ v' - 4u' + 2u = 0 \end{cases}$$

6. Sia $u \in C^1([-1, 1]; \mathbb{R}_+)$ tale che $u(-1) = u(1) = R$ $(R > 0)$, si scriva il funzionale ϕ che associa ad u l'area della superficie di rotazione che in coordinate cilindriche si scrive $\{\rho = u(z), \; -1 \leq z \leq 1\}$.

Si scriva inoltre l'equazione di Eulero Lagrange relativa a tale funzionale e si verifichi che le funzioni della forma $u(z) = a\cosh(z/a)$ sono soluzioni di tale equazione.

Ne si deduca che se R è sufficentemente grande il funzionale ϕ ammette punti stazionari.

Note:
Per sostenere l'esame di **Analisi III** vanno risolti gli esercizi 1, 2 e 3 mentre per sostenere l'esame di **Analisi IV** vanno risolti gli esercizi 4, 5 e 6; il tempo disponibile è **tre ore**.
Per sostenere l'esame di **Analisi II** (o l'esame di **Analisi III e IV congiuntamente**) vanno risolti quattro esercizi a scelta; in questo caso il tempo disponibile è **tre ore e mezza**.

I risultati del compito potrebbero essere disponibili all'indirizzo *www.dm.unipi.it/~carminat*