ANALISI I - 4.11.2002 - Primo compitino

1. Si dimostri la seguente formula

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2.$$

2. Si dica chi è il più grande tra i due numeri

$$2002^{2003} \qquad\qquad 2003^{2002}$$

3. Sia $A_i, i \in I$ una famiglia di insiemi di numeri reali. Si mostri che vale la seguente identità:

$$\sup \cup_{i\in I} A_i = \sup_{i\in I} \sup A_i.$$

4. Si dica se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

ha somma finita.

Più in generale si dica per quali $a > 0$ risulta finita la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} a^n.$$

5. Si mostri che

$$\prod_{k=0}^{+\infty} (1 + 2^{-k}) \leq \sqrt{3}e$$