ANALISI I - 18.12.2002 - Secondo compitino[1]

1. Si calcoli
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+n^2}}{n}\right)^{n^2}.$$

2. Dire se converge la serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty}[1-k\sin(1/k)].$$
e fornire una maggiorazione (motivandola!).

3. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{7}}{3}\right)^{n}.$$
[Facoltativo] Si cerchi una formula che generalizzi questo limite.

4. Sia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1, \qquad (*)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\ell\in\bar{\mathbb{R}}; \qquad (**)$$
si mostri che allora $\ell=0$.

5. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞;
   (a) si dimostri che se f ha tre zeri in $[a,b]$ allora esiste $\bar{x}\in(a,b)$ tale che $f''(\bar{x})=0$;
   (b) piú in generale si dimostri che se f ha n zeri in $[a,b]$ allora esiste $\bar{x}\in(a,b)$ tale che $f^{(n-1)}(\bar{x})=0$.

[1] I risultati del compito saranno presto (?!) disponibili all'indirizzo

www.dm.unipi.it/~carminat/2002

Può darsi che, verso gennaio, allo stesso indirizzo troviate una prima schematica versione degli appunti del corso.