ANALISI I - Primo semestre - 30.01.2003

1. Si dica se converge la serie
$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k}).$$

2. Sia $a > 0$ un parametro reale. Si calcoli al variare di a il limite (qualora esista)
$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log(1+a^k)$$
Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ converge la serie
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k}\log(1+a^k)$$

3. Sia $u \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ una funzione tale che
$$\begin{array}{l} |u(t)| \leq \ell \\ |u''(t)| \leq g \end{array} \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$
Si dimostri che allora $|u'(t)|$ è limitata e più precisamente vale la stima
$$|u'(t)| \leq 2\sqrt{g\ell}.$$
[Sugg: può essere utile usare la formula di Taylor.]