ANALISI I

–3.07.2003–

1. Dire per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ risulta convergente la serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{3e^t}{e^{2t}+1} \right)^k .$$
Si scriva la somma della serie per tali valori del parametro.

2. Sia consideri l'espressione
$$f(x) := \frac{1}{x \tan x} - \frac{1}{x^2}.$$
   (a) Si mostri che f definisce una funzione estendibile per continuità nell'origine.

   (b) Si studi la funzione in un intorno dell'origine, in particolare si dica se l'origine e' punto di massimo o minimo locale per la funzione estesa per continuità.

ANALISI II

–3.07.2003–

3. Sia $N(r) := \#\{(h,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ : \ h^2 + k^2 \le r^2\}$

   (a) Si mostri che
   $$\lim_{r \to +\infty} \frac{N(r)}{r^2} = \pi/4.$$

   (b) Più precisamente si mostri che vale una stima del tipo
   $$0 \le \frac{\pi r^2}{4} - N(r) \le Cr$$
   con C una opportuna costante positiva.

4. Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale
   $$u''' - 6u'' + 9u' = t^2 e^{3t}$$
   e si dica quali di queste sono limitate sull'intervallo $(-\infty, 0)$.