ANALISI I

–18.12.2003–

1. Si mostri che la successione definita dalla ricorrenza
$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = -\sin(x_n) \end{cases}$$
ammette limite.

   Si discuta la convergenza e la convergenza assoluta della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n.$$
   Si calcoli la parte intera del numero $s := \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

2. Si calcoli
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2 - i\pi n + 1}{n^2 + i\pi n + 1}\right)^n.$$
   Piú in generale: siano
$$\begin{array}{l} P(x) = x^h + a_1 x^{h-1} + a_2 x^{h-2} + \ldots + a_{h-1}x + a_h \\ Q(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m \end{array}$$
   due polinomi a coefficenti complessi; si dica sotto quali condizioni sul grado e sui coefficienti di P e di Q la successione
$$z_n = \left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)^n$$
   converge in $\mathbb{C}$.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) \geq x^2$.
   (i) Si mostri che f ammette minimo su $\mathbb{R}$.
   (ii) Si mostri che per ogni $m \geq f(1)$ esiste un $x \in [1, m]$ tale che $f(x) = mx$.

Ciascun esercizio vale 11 punti.
È ammesso rispondere ad una domanda di un esercizio anche dando per acquisiti i risultati enunciati nei punti precedenti.
La correzione sarà alle ore 12.00, alla fine del compito.

I risultati, non appena disponibili, verranno messi in rete all'indirizzo `http://www.dm.unipi.it/~carminat/2003/index.html`.