ANALISI I

–29.01.2004–

1. Si discuta, al variare del parametro reale λ, la convergenza della serie[1]

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(\pi k)}{k(\cos(\pi k)+\lambda)}.$$

2. Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \geq 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n}{x_n+1} \end{cases}$$

   (a) Si trovi una espressione esplicita (in n ed α) per x_n.

   (b) Si dica per quali valori del parametro α la successione x_n ammette limite e, nel caso, lo si determini.

3. Sia $\{a_k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ un sottoinsieme (numerabile) della retta reale e si definisca $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ come

$$f(x) = \sum_{\{k\in\mathbb{N} \,:\, a_k \leq x\}} 2^{-k}.$$

   (a) Si mostri che f è limitata e (debolmente) crescente.

   (b) Si mostri che esistono i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

   e li si calcoli.

   (c) Si mostri che f non è continua in $x = a_k$ per nessun valore di $k \in \mathbb{N}$.

   (d) Viceversa, si mostri che se $x_0 \neq a_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ allora f è continua in x_0.

[1] Serie di J.B. Del Pollo (1713–1839).