ANALISI II

–26.05.2004–

Rispondere ai quesiti giustificando le risposte.

1. Si trovi la soluzione u_λ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 1 + \lambda \sin u, \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

al variare del parametro $\lambda \in]0, 1[$.
Si calcolino (per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato) i limiti

$$v_0(t) := \lim_{\lambda \to 0^+} u_\lambda(t), \qquad v_1(t) := \lim_{\lambda \to 1^-} u_\lambda(t)$$

e si verifichi che $v_0(t) = u_0(t)$ e $v_1(t) = u_1(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

2. Si studi la funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \arctan(t/x) e^{-t} \, dt \qquad (x > 0)$$

(i) Provare che f è continua, monotona e convessa.

(ii) Calcolare (qualora esistano) i seguenti valori:

$$\lim_{x \to 0} f(x), \quad \lim_{x \to +\infty} f(x), \quad \sup_{x > 0} f(x), \quad \inf_{x > 0} f(x).$$

(iii) Mostrare che f è derivabile e calcolare f'.