ANALISI I

–07.06.2004–

1. Si dimostrino le formule

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k} = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari}, \\ 2^n(-1)^{n/2} & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{2k+1} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari}, \\ 2^n(-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

2. Si ordinino (se possibile) le seguenti successioni in modo che ciascuna sia un o-piccolo della precedente (per $n \to +\infty$).

$$a_n = \log(n!), \qquad b_n = \sqrt[n]{n!}, \qquad c_n = 3^{\log n}, \qquad d_n = \log(2^n + 3^n).$$

3. Si consideri la successione definita da

$$a_n := \prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{1}{k}).$$

   (a) Si dica se a_n è limitata.

   (b) Si trovi $C > 0$ tale che $a_n \geq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

ANALISI II[1]

–07.06.2004–

1. Si consideri la funzione razionale

$$q(x) = \frac{9}{x^3 - 3x + 2}.$$

   (a) Trovare una primitiva $Q(x)$ di $q(x)$ tale che $Q(0) = 0$.

   (b) Calcolare i coefficenti c_k dello sviluppo $q(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$.

2. Sia

$$f(x) := \int_{\mathbb{R}} \cos(xt) e^{-t^2/2}\, dt.$$

   (a) Provare che, per ogni valore di x, l'integrale improprio è convergente e definisce una funzione continua.

   (b) Calcolare $f(0)$ (ricordando che $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$).

   (c) Dimostrare che f è derivabile.

   (d) Mostrare che f risolve una semplice equazione differenziale lineare; usare tale equazione per calcolare f.

   (e) Calcolare la miglior costante di Lipschitz per f.

[1] Per Analisi I+II si svolga l'intero compito di analisi II.