ANALISI I

–28.06.2004–

1. (a) Si dica quanti sono i poligoni convessi (non degeneri) che si possono costruire usando i vertici di un ottagono regolare.
   (b) Si dica quanti sono tutte le spezzate chiuse che si possono costruire usando i vertici di un ottagono regolare.

2. Si calcoli
$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\log(n+1)}{\log n}\right]^n.$$

3. Sia
$$f_n(x) := e^{-nx}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$
   (a) Si mostri che l'equazione $f_n(x) = x^2$ ammette una unica soluzione positiva.
   (b) Detta α_n la soluzione positiva dell'equazione $f_n(x) = x^2$, si trovino stime per il valore di α_n che permettano di studiare la convergenza delle seguenti serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2.$$

ANALISI II[1]

–07.06.2004–

1. Sia
$$w_n := \frac{n + i\lambda}{n - i\lambda}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$
   (a) Mostrare che w_n è limitata; determinare $\theta_n \in \mathbb{R}$ tale che $w_n = e^{i\theta_n}$
   (b) Dire per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ la successione $(w_n)^{n^2}$ converge per $n \to +\infty$.

2. Sia
$$\varphi_a(x) := \frac{(1 + 2x)^a - (1 + x)^a}{x}, \qquad a > 0.$$
   (a) Calcolare $\lim_{x \to 0} \varphi_a(x)$.
   (b) Studiare la monotonia di $\varphi_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ precisando per quali a è crescente.

3. Si trovino, usando il metodo della variazione delle costanti, tutte le soluzioni della equazione differenziale
$$u'' - u = \frac{1}{e^t + e^{-t}}.$$
Si mostri che ne esiste una ed una sola limitata su tutto $\mathbb{R}$.

[1] Per Analisi I+II si svolga l'intero compito di analisi II.