ANALISI I

–31.03.2004–

1. Si consideri l'equazione

$$x = \tan x, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

(i) Provare che per ogni $k \in \mathbf{Z}$ esiste un'unica soluzione di (1) nell'intervallo $I_k := (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$.

Sia $H(x) := \tan x - x$, $k \in \mathbf{Z}$ fissato. Osserviamo che:

$$\left.\begin{array}{l} H : I_k \to \mathbb{R} \text{ è continua;} \\ \sup_{x\in I_k} H(x) = +\infty, \ \inf_{x\in I_k} H(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow H : I_k \to \mathbb{R} \text{ è surgettiva}$$

$$H'(x) = \tan^2 x \geq 0 \qquad \Rightarrow H : I_k \to \mathbb{R} \text{ è iniettiva.}$$

(La prima implicazione è una diretta conseguenza del teorema degli zeri; la seconda segue dal fatto che, per il teorema di Lagrange, H è monotona crescente su I_k inoltre la monotonia è stretta perchè se esistessero valori $a, b \in I_k$ tali che $a < b$ e $H(a) = H(b)$ H sarebbe costante su $[a, b]$ e di conseguenza $H'(x) = 0$ su $]a, b[$, ma ciò non si verifica in quanto H' non si annulla su alcun intervallo aperto.)

Quindi $H : I_k \to \mathbb{R}$ è bigettiva, di conseguenza esiste un unico $x_k \in I_k : H(x_k) = 0$ cioè tale che $\tan x_k = x_k$.

(ii)+(iii) Trovare tre costanti a, b e c tali che, detta x_k la soluzione del punto precedente, valga lo sviluppo $x_k = ak + b + c/k + o(1/k)$ per $k \to +\infty$.

Sia $k > 0$. Per costruzione $x_k \in I_k$, anzi $k\pi < x_k < k\pi + \pi/2$. Sia $y_k := k\pi + \pi/2 - x_k$ quindi $x_k := k\pi + \pi/2 - y_k$ e $y_k \in]0, \pi/2[$. Poichè

$$x_k = \tan x_k = \tan(k\pi + \pi/2 - y_k) = \tan(\pi/2 - y_k) = \frac{1}{\tan y_k}$$

si ha $y_k = \arctan(\frac{1}{x_k})$ ma

$$\frac{1}{k\pi + \pi/2} < \frac{1}{x_k} < \frac{1}{k\pi} \Rightarrow \frac{1}{x_k} = \frac{1}{k\pi} + o(\frac{1}{k}) \qquad k \to +\infty$$

e quindi, visto che $\arctan y = y + o(y)$ $(y \to 0)$,

$$y_k = \arctan(\frac{1}{k\pi} + o(\frac{1}{k})) = \frac{1}{k\pi} + o(\frac{1}{k}).$$

Dunque $x_k = k\pi + \pi/2 - 1/(k\pi) + o(1/k)$.

2. Sia $g_\lambda(x) := e^{-x}(1+x)^{1+\lambda x}$.

(i) Si determini il parametro reale λ in modo che esista e sia finito il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log g_\lambda(x)}{x^3}$$

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) := \ & \log g_\lambda(x) = (1+\lambda x)\log(1+x) - x \\ = \ & (1+\lambda x)(x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)) - x \\ = \ & x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3) + \lambda x^2 - \lambda x^3/2 + o(x^3) - x \\ = \ & (\lambda - 1/2)x^2 + (1/3 - \lambda/2)x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

È ora evidente che se $\lambda \neq 1/2$ il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\log g_\lambda(x)}{x^3}$ non esiste mentre

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_{\frac{1}{2}}(x)}{x^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

(ii) Si dica per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ 0 è un punto di minimo locale per g_λ.

0 è punto di minimo locale per $g_\lambda \iff$ 0 è punto di minimo locale per f_λ. Ma dallo sviluppo ottenuto al punto precedente si deduce che:

$$\begin{cases} \lambda > 1/2 \Rightarrow \text{ 0 è punto di minimo locale per } f_\lambda \\ \lambda = 1/2 \Rightarrow \text{vicino a 0 il segno di } f_\lambda(x) \text{ coincide con quello di } x^3 \\ \lambda < 1/2 \Rightarrow \text{ 0 è punto di massimo locale per } f_\lambda \end{cases}$$

Pertanto 0 è punto di minimo locale per $g_\lambda \iff \lambda > 1/2$

(iii) Si dica per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha che $g_\lambda(x) > 1$ per ogni $x > 0$.

$$g_\lambda(x) > 1 \ \ \forall x > 0 \iff f_\lambda(x) > 0 \ \ \forall x > 0.$$

Da (ii) $f_\lambda(x) > 0 \Rightarrow \lambda \geq 1/2$. Derivando f_λ otteniamo

$$f'_\lambda(x) = \lambda \log(1+x) + \frac{1+\lambda x}{1+x} - 1, \qquad f''_\lambda(x) = \frac{2\lambda + \lambda x - 1}{(1+x)^2}$$

Per $\lambda \geq 1/2$ $f_\lambda(0) = 0$, $f'_\lambda(0) = 0$ e $f''_\lambda(x) > 0$ su $x > 0$; scrivendo la formula di Taylor con resto di Lagrange si ottiene

$$f_\lambda(x) = f''_\lambda(\xi)x^2, \qquad 0 < \xi < x$$

e dunque $f_\lambda(x) > 0$ per $x > 0$.

3. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

(i) La funzione f è uniformemente continua? È lipschitziana?

La funzione f è uniformemente continua in quanto è una funzione continua sull'intervallo chiuso e limitato [0,1]. La funzione **non** è lipschitziana in quanto $f'(x) = \sin(\dfrac{1}{x}) - \dfrac{1}{x}\cos(\dfrac{1}{x})$ non è limitata su $(0,1)$, in quanto $f'(\frac{1}{2k\pi}) = 2k\pi \to +\infty$, $k \to \infty$.

(ii) Determinare $C \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x,\ y \in [0,1]$ si abbia

$$|f(y) - f(x)| \leq C|y-x|^{1/2} \tag{2}$$

[Suggerimento: si verifichi la disuguaglianza (2) per $0 \leq x < y \leq 1$ distinguendo i due casi $x \geq |y-x|^{1/2}$ e $x \leq |y-x|^{1/2}$.]

Non è restrittivo supporre (come sugg.) $0 \leq x < y \leq 1$.
Se $x \leq |y-x|^{1/2}$ allora

$$|f(y)-f(x)| \leq |f(y)|-|f(x)| \leq y+x = y-x+2x \leq |y-x|^{1/2}(|y-x|^{1/2}+2) \leq 3|y-x|^{1/2}.$$

Se $x \geq |y-x|^{1/2}$ si prenda $x < \xi < y$ tale che

$$|f(y)-f(x)| = |f'(\xi)||x-y| \leq y-x+\frac{y-x}{x} \leq |y-x|^{1/2}(|y-x|^{1/2}+1) \leq 2|y-x|^{1/2}.$$

Pertanto l'equazione (2) è in ogni caso verificata se $C = 3$.

(iii) Determinare $\delta > 0$ in modo che per ogni partizione di Riemann $\mathcal{P}$ dell'intervallo $[0,1]$ tale che $|\mathcal{P}| < \delta$ si abbia

$$S(\mathcal{P}, f) - \int_0^1 f(x)\ dx < 10^{-6}.$$

$$S(\mathcal{P}, f) - \int_0^1 f(x)\ dx \leq S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f) \leq \omega(|\mathcal{P}|) \qquad \text{con } \omega(t) = 3t^{1/2}.$$

Pertanto basterà che $3|\mathcal{P}|^{1/2} < 10^{-6}$ condizione che sarà verificata se $\delta = 10^{-13}$.