Terzo modulo di ANALISI
Prima prova intermedia
11.11.2004

1. Si consideri la successione di funzioni
$$f_k(t) = \frac{t^k}{k!}e^{-t}$$
   (a) Mostrare che f_k converge uniformemente in $[0,+\infty[$.
   (b) Studiare la convergenza della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$, in particolare dire se sono vere o false le seguenti proposizioni:
$$\begin{array}{l} \sum f_k \texttt{ converge uniformemente su } [0,1]\texttt{.} \\ \sum f_k \texttt{ converge uniformemente su } [0,+\infty[\texttt{.} \\ \sum f_k \texttt{ converge normalmente su } [0,+\infty[\texttt{.} \end{array}$$

2. Sia $\lambda \in [0,1]$. Si consideri il problema di trovare una funzione che soddisfi le seguenti condizioni
$$u'(t) = u(\lambda t), \qquad u(0) = 1 \qquad (*)$$
   (a) Determinare una contrazione $\Phi : C^0([0,1/2],\mathbb{R}) \to C^0([0,1/2],\mathbb{R})$ con la proprietà che
$$\Phi(u) = u \iff u \text{ soddisfa } (*).$$
   (b) Mostrare che esiste una unica $u \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ che soddisfa $(*)$. Mostrare che u ammette uno sviluppo in serie di potenze convergente per ogni $t \in \mathbb{R}$ e calcolarlo.

3. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da
$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^2 - 4x - y^2 + 1 \\ 6xy - 3y \end{pmatrix}$$
   (a) Calcolare la matrice jacobiana $J_F(x,y)$ e dire per quali $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ essa risulta invertibile.
   (b) Verificare che F è invertibile fra un intorno U di $(0,0)$ ed un intorno V di $(1,0)$. Detta $G : V \to U$ l'inversa di $F_{|U}$, calcolare la matrice jacobiana $J_G(1,0)$ di G.

Nota: la formula di Stirling è $n! = \sqrt{2\pi}\; n^{n+1/2}\; e^{-n}\; (1+o(1)), \quad n \to +\infty$.