Quinto appello d'esame del secondo modulo di

ANALISI

–10.01.2005–

1. Siano $a, b \in \mathbb{R}[x]$ due polinomi reali, $gr(a) = n,\ gr(b) = m$ e sia $c \in \mathbb{R}$.
   (a) Stimare il numero di soluzioni reali dell'equazione $a(x)e^{b(x)} = c$
   (b) Stimare il numero di soluzioni reali dell'equazione $xe^{b(x)} = a(x)$

2. Studiare la funzone $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_x^{3x} \frac{e^{-|t|}}{t}\, dt$$

   In particolare
   (a) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} F(x), \qquad \lim_{x\to +\infty} F(x)$$

   (b) Mostrare che F è una funzione pari (cioé $F(x) = F(-x)$) ed è estendibile per continuità su $\mathbb{R}$.
   (c) Calcolare $\inf_{x\in\mathbb{R}} F(x)$ e $\sup_{x\in\mathbb{R}} F(x)$.

3. Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \cos^2 u \\ u(0) = \pi \end{cases}$$

Primo appello d'esame del terzo modulo di

ANALISI

–10.01.2005–

1. Si consideri il polinomio monico di quinto grado nella variabile x

$$P(a,b,x) := x^5 + ax + b, \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

   (a) Mostrare che per ogni $(a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ il polinomio $P(a,b,\cdot)$ ammette un'unica radice reale.

   (b) Provare che tale radice dipende in modo C^1 dai coefficienti, cioé che esiste $u \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ tale che per ogni $\xi \in \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$,

$$P(a,b,\xi) = 0 \iff \xi = u(a,b).$$

   Calcolare il gradiente di u nel punto (1,-2).

   (c) Provare che $u \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e calcolare la matrice hessiana di u nel punto (1,-2).

2. Si consideri la successione di funzioni

$$F_n(x) = \int_x^{nx} e^{-t^2}\, dt.$$

   Dire se sono vere le seguenti affermazioni

   (a) `La successione` F_n `converge puntualmente su` $\mathbb{R}$.

   (b) `La successione` F_n `converge uniformemente su` $[0,1]$.

   (c) `La successione` F_n `converge uniformemente su` $[1,+\infty[$.

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = t - u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases} \qquad (C)$$

   Scrivere la soluzione u di (C) nella forma $u = \frac{\dot{z}}{z}$ dove z risolve un'equazione lineare del second'ordine. Trovare lo sviluppo in serie di potenze in 0 di z e di $\dot{z}$.