Quarto appello d'esame del terzo modulo di

ANALISI

–04.07.2005–

1. Sia $f_n(x) = n^a x^n \log x$ $(n \geq 1)$ e sia $I =]0,1[$.

   (i) Dire per quali valori del parametro reale a la successione f_n è uniformemente convergente sull'intervallo I.

   (ii) Dire per quali valori del parametro reale a la serie $\sum f_n$ è uniformemente convergente sull'intervallo I.

   (iii) Dire per quali valori del parametro reale a la serie $\sum f_n$ è normalmente convergente sull'intervallo I.

2. Sia $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 - 4yz - 1 = 0\}$. Determinare i valori

$$\sup_{(x,y,z)\in\Sigma} f(x,y,z), \qquad \inf_{(x,y,z)\in\Sigma} f(x,y,z).$$

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos(t+y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

   (i) Mostrare che la soluzione massimale è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

   (ii) Mostrare che la soluzione è una funzione dispari, cioè $y(t) = -y(-t)$

   (iii) (Facoltativo) Dire se esiste il limite $\lim_{t\to+\infty} y(t)/t$.