Analisi Matematica I - Secondo Compitino
19 Dicembre 2005 - Fila 1

Esercizio 1. Data l'applicazione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1+z}{1-z},$$

determinare $f(i\mathbb{R})$ e $f(\mathbb{U} \setminus \{1\})$, dove $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ è il cerchio unitario.

Esercizio 2. (a) Dimostrare che la derivata n-esima della funzione

$$f(x) = e^{x^3 - x}$$

è della forma

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\, e^{x^3 - x},$$

con p_n polinomio.

(b) Determinare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x - x^3 + \lambda \log x} f^{(n)}(x).$$

Esercizio 3. (a) Dato un intero positivo n, dimostrare che la funzione

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \tan x - 2nx - 3\sin x,$$

ha un unico punto di minimo x_n.

(b) Dimostrare che $x_n \to \pi/2$ per $n \to +\infty$.

(c) Determinare costanti a e b tali che valga lo sviluppo

$$x_n = \frac{\pi}{2} + a\, n^{-1/2} + b\, n^{-3/2} + o(n^{-3/2}) \quad \text{per } n \to +\infty.$$