Terzo appello del primo modulo di

ANALISI

–26.06.2006–

1. Si vuole ripartire un insieme di 12 elementi in 3 classi di 4 elementi ciascuna. In quanti modi diversi si può fare questa suddivisione?

2. Sia $a_k \geq 3^k$. Mostrare che se $|x| < 3$ la quantità

$$F(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log a_k}{a_k} x^k$$

è ben definita. Mostrare inoltre che $F(1) \leq \frac{1}{e} + \frac{3}{4} \log 3$.

3. Provare che per ogni $f \in C^2([0,1])$ con $f(0) = f(1) = 0$ e $|f''(x)| \leq 1$ si ha che

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2} x(1-x) \qquad \forall x \in [0,1].$$

Primo appello del secondo modulo di

ANALISI

–26.06.2006–

1. Calcolare, al variare del parametro positivo α, il valore

$$\sup_{t>0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t}.$$

2. (a) Determinare i valori del parametro β per cui risulti finito l'integrale improprio

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{(1+\cos x)^\beta} dx$$

   (b) Per tali valori calcolare il valore dell'integrale.

3. (a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y'' + y = \frac{\sin t}{t}.$$

   (b) Trovare $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che per ciascuna di esse si abbia

$$y(t) = \gamma \cos t \log t + O(1) \qquad \text{per } t \to +\infty$$